**Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная,
Д. К. Агишева, С. А. Зотова**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ: ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная, Д. К. Агишева, С. А. Зотова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ: ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Волгоград 2010

УДК 519.2

Рецензенты:

Кульков В.Г.- доктор физико-математических наук, профессор филиала ГОУВПО «Московский энергетический институт (технический университет)».

Матвеева, Т. А., Светличная, В. Б., Агишева, Д. К., Зотова, С. А.
Специальные главы математики: операционное исчисление: учебное пособие/ Т. А. Матвеева, В. Б. Светличная, Д. К. Агишева, С. А. Зотова; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2010. – 56 с.

Учебное пособие содержит необходимый теоретический материал и большое количество примеров и задач, иллюстрирующих основные понятия и применения по теме «Операционное исчисление». Разработаны задания для самостоятельного решения.

Рассчитано на студентов различных форм обучения высших технических учебных заведений всех специальностей и направлений.

Библиогр.: 4 названий

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Введение

Операционное исчисление играет важную роль при решении прикладных задач, особенно в современной автоматике и телемеханике.

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить решения дифференциальных и некоторых типов интегральных уравнений к рассмотрению более простых алгебраических задач.

1. Оригинал изображения, преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется функция $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющая трем условиям:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2. $f(t)$ – кусочно-непрерывная функция при $t \geq 0$, т.е. она непрерывна или имеет точки разрыва I рода, причем на каждом конечном промежутке оси t таких точек конечное число;

3. Существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, т.е. при возрастании t функция $f(t)$ возрастает не быстрее, чем некоторая показательная функция. Число s_0 называется *показателем роста* $f(t)$.

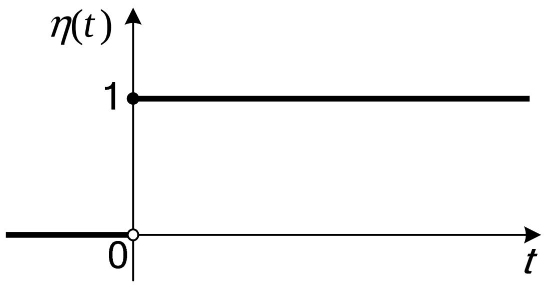
Условия 1-3 выполняются для большинства функций, описывающих физические процессы. Первое условие означает, что процесс начинается с некоторого момента времени; удобнее считать, что в момент $t = 0$. Условию 3 удовлетворяют ограниченные функции (для них можно положить $s_0 = 0$), степенные t^n $(n > 0)$ и другие.

Например, для функций вида $f(t) = e^{\alpha t^2}$ условие 3 не выполняется, следовательно, они не являются оригиналами. Не является также оригиналом и функция $f(t)=\frac{1}{t}$, т.к. не выполняется 2-е условие: $t=0$ точка разрыва II рода.

Функция $f(t)$ может быть и комплексной функцией действительного переменного t, т.е. иметь вид $f(t)=f_1(t)+i\cdot f_2(t)$; она считается оригиналом, если действительные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами.

Простейшей функцией-оригиналом является *единичная функция Хевисайда*

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$



Очевидно, что для произвольной функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям 2, 3, функция $f(t)\cdot\eta(t)=\begin{cases}f(t), & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ удовлетворяет всем условиям функции-оригинала.

Пример 1. Показать, что функция $f(t)=\begin{cases}e^{3t}\cdot\sin t, & t\ge 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ является функцией-оригиналом.

Решение. Проверим три условия, определяющие функцию-оригинал.

Условие 1 очевидно выполняется в соответствии с определением функции: $f(t)=0,\ t<0$. Условие 2 выполняется, т.к. функция $f(t)$ непрерывна при $\forall t\ge 0$. Так как $\left|e^{3t}\cdot\sin t\right|\le e^{3t}$ для $\forall t\ge 0$, то в условии 3 в качестве M можно взять число $M=1$ и $s_0=3$ (показатель роста оригинала).

Таким образом, данная функция является функцией-оригиналом.

Изображением функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая формулой

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t)\,dt}.$$

Интеграл в правой части равенства называют интегралом Лапласа, а переход от оригинала $f(t)$ к его изображению $F(p)$ – ***преобразованием Лапласа.***

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ записывается в виде: $f(t) \leftrightarrow F(p)$ или $F(p) \leftrightarrow f(t)$.

Теорема 1 (существования изображения).

Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 - показатель роста оригинала $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической (регулярной) функцией.

Следствие (необходимый признак существования изображения).

Если $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Теорема 2 (о единственности оригинала).

Если функция $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f(t)$ и $g(t)$, то эти оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны.

Пример 2. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение. Для единичной функции Хевисайда выполняются условия 1-3 оригинала ($|\eta(t)| \leq e^0 \Rightarrow M = 1,\ s_0 = 0$). По определению изображения имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot \eta(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot 1\,dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-pt}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot e^{-pb}\right).$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$ ($s_0 = 0$), то $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-pb} = 0$, и в этом случае $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$.

Таким образом, изображение $\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$. Часто единичную функцию обозначают символически $\eta(t) = 1 \leftrightarrow \frac{1}{p}$.

В дальнейшем функцию-оригинал будем кратко записывать в виде $f(t)$, подразумевая, что $f(t) = \begin{cases} f(t), & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Пример 3. Найти изображение функции $f(t) = e^{at}$, где $a = \alpha + i\beta$.

Решение. Данная функция является оригиналом, т.к. функция непрерывна при $t \ge 0$ и $\left|e^{at}\right| \le e^{\alpha t} \Rightarrow M = 1,\ s_0 = \alpha = \operatorname{Re} a$. По определению изображения имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot e^{at}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(p-a)t}\,dt = -\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\right|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-a}\cdot e^{-(p-a)b}\right).$$

Если $\operatorname{Re}(p-a) > 0$ ($s_0 = \operatorname{Re} a$), то $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-(p-a)b} = 0$, и получаем

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a).$$

Частным случаем полученного изображения является

$$a^t = e^{t\cdot\ln a} \leftrightarrow \frac{1}{p-\ln a}.$$

Функция $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$ является аналитической (регулярной) не только в полуплоскости $\operatorname{Re} p>\operatorname{Re} a$, где соответствующий интеграл Лапласа сходится, а на всей комплексной плоскости p, кроме точки $p=a$. Такая особенность наблюдается и для многих других изображений. Далее будет более важным, как правило, само изображение функции, а не область, в которой оно выражается интегралом.

Пример 4. Найти изображение функции $f(t)=t$.

Решение. Данная функция является оригиналом ($M=1$, $s_0=1$). По определению изображения имеем

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot t\,dt=\begin{vmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{-pt}\,dt & v=\dfrac{e^{-pt}}{-p} \end{vmatrix}=$$

$$=-t\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt=-\lim_{b\to+\infty}\frac{t}{pe^{pt}}-\frac{1}{p^2}\cdot\lim_{b\to+\infty} e^{-pt}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}}-\frac{1}{p^2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-pt}-1\right)$$

Если $\operatorname{Re} p>0$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{t}{e^{pt}}=0,\ \lim\limits_{b\to+\infty} e^{-pt}=0$, т.е. $t\leftrightarrow\dfrac{1}{p^2}\ \ (\operatorname{Re} p>0)$.

Аналогично можно получить изображения степенных функций-оригиналов: $t^2\leftrightarrow\dfrac{2}{p^3}$, …, $t^n\leftrightarrow\dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

2. Свойства преобразования Лапласа

Находить изображения, пользуясь только определением изображения не всегда просто и удобно. Свойства преобразования Лапласа существенно облегчают задачу нахождения изображений для большего числа разнообразных функций, а также задачу отыскания оригиналов по их изображениям.

Пусть $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $g(t) \leftrightarrow G(p)$.

$1 = \eta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$	$t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}$
$t^2 \leftrightarrow \dfrac{2}{p^3}$	$t^n \leftrightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}$	$a^t \leftrightarrow \dfrac{1}{p-\ln a}$
1) **Теорема линейности:** $\forall \alpha, \beta \in C: \quad \alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(p) + \beta G(p)$.	
$\sin(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}$	$sh(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2-1}$
$\cos(t) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+1}$	$ch(t) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-1}$
2) **Теорема подобия**: $\lambda > 0: \quad f(\lambda \cdot t) \leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} F\left(\dfrac{p}{\lambda}\right)$.	
$\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2+k^2}$	$sh(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2-k^2}$
$\cos(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+k^2}$	$ch(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-k^2}$
3) **Теорема смещения**: $\forall a \in C: \; e^{at} f(t) \leftrightarrow F(p-a)$.	
$e^{at} t \leftrightarrow \dfrac{1}{(p-a)^2}$	$e^{at} t^n \leftrightarrow \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos(kt) \leftrightarrow \dfrac{p-a}{(p-a)^2+k^2}$	$e^{at} ch(kt) \leftrightarrow \dfrac{p-a}{(p-a)^2-k^2}$
$e^{at}\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{(p-a)^2+k^2}$	$e^{at} sh(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{(p-a)^2-k^2}$

4) **Теорема запаздывания**: $f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$, $\forall \tau > 0$.

$\eta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}$	$\Rightarrow$	$\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{1}{p}e^{-p\tau}$
$t\eta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}$	$\Rightarrow$	$(t-\tau)\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2}e^{-p\tau}$
$t^2\eta(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{p^3}$	$\Rightarrow$	$(t-\tau)^2\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{2}{p^3}e^{-p\tau}$
$t^n\eta(t) \leftrightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\Rightarrow$	$(t-\tau)^n\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{n!}{p^{n+1}}e^{-p\tau}$
$\cos(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+k^2}$	$\Rightarrow$	$\cos(k(t-\tau))\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{pe^{-p\tau}}{p^2+k^2}$
$\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2+k^2}$	$\Rightarrow$	$\sin(k(t-\tau))\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{ke^{-p\tau}}{p^2+k^2}$
$ch(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-k^2}$	$\Rightarrow$	$ch(k(t-\tau))\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{pe^{-p\tau}}{p^2-k^2}$
$sh(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2-k^2}$	$\Rightarrow$	$sh(k(t-\tau))\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \dfrac{ke^{-p\tau}}{p^2+k^2}$

5) **Теорема для периодического оригинала** $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \cdot \int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$, где T – период оригинала.

6) **Теорема опережения**:

$$f(t+\alpha) \leftrightarrow e^{p\alpha}\left[F(p) - \int_0^{\alpha} f(t)e^{-pt}dt\right],\ \alpha > 0.$$

7) **Теорема о дифференцировании изображения**:

$$-t\cdot f(t)\leftrightarrow F'(p),$$

$$t^2\cdot f(t)\leftrightarrow F''(p),$$

$$(-1)^n t^n\cdot f(t)\leftrightarrow F^{(n)}(p).$$

$t\cdot\cos(kt)\leftrightarrow\dfrac{p^2-k^2}{(p^2+k^2)^2}$	$t\cdot ch(kt)\leftrightarrow\dfrac{p^2+k^2}{(p^2-k^2)^2}$
$t\cdot\sin(kt)\leftrightarrow\dfrac{2pk}{(p^2+k^2)^2}$	$t\cdot sh(kt)\leftrightarrow\dfrac{2pk}{(p^2-k^2)^2}$

8) **Теорема об интегрировании изображения**:

Если $\int\limits_p^{+\infty}F(z)\,dz$ является сходящимся, то $\dfrac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int\limits_p^{+\infty}F(z)\,dz$.

$\dfrac{\sin t}{t}\leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}-arctg\left(p\right)$	$\dfrac{1-e^t}{t}\leftrightarrow\ln\left(\dfrac{p-1}{p}\right)$

9) **Теорема о дифференцировании оригинала**:

$$f'(t)\leftrightarrow pF(p)-f(0),$$

$$f''(t)\leftrightarrow p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f'''(t)\leftrightarrow p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0),$$

$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

10) **Теорема об интегрировании оригинала**: $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\leftrightarrow\dfrac{F(p)}{p}$.

11) **Теорема об умножении изображений** (о свертки):

$f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ – свертка оригиналов $f(t),g(t)$, тогда $f(t)*g(t)\leftrightarrow F(p)G(p)$.

Приведем примеры, показывающие как с помощью данных свойств были получены изображения некоторых функций-оригиналов.

1) $\sin(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos(t) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+1}$.

По формулам Эйлера: $\sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2}$, $\cos(t) = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$.

Применим теорему линейности и полученное выше изображение $e^{at} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}$, полагая $a = \pm i$.

$$\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2-i^2} = \frac{1}{p^2+1};$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{p^2-i^2} = \frac{p}{p^2+1}.$$

2) $sh(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2-k^2}$, $ch(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-k^2}$.

Применим теорему подобия и из таблицы $sh(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2-1}$, $ch(t) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2-1}$.

$$sh(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{k}\right)^2-1} = \frac{1}{k}\cdot\frac{k^2}{p^2-k^2} = \frac{k}{p^2-k^2};$$

$$ch(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k}\cdot\frac{\frac{p}{k}}{\left(\frac{p}{k}\right)^2-1} = \frac{1}{k}\cdot\frac{k\,p}{p^2-k^2} = \frac{p}{p^2-k^2}.$$

Аналогично получаются $\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{p^2+k^2}$ и $ch(kt) \leftrightarrow \dfrac{p}{p^2+k^2}$.

3) $e^{at}\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{(p-a)^2+k^2}$, $e^{at}\cos(kt) \leftrightarrow \dfrac{p-a}{(p-a)^2+k^2}$.

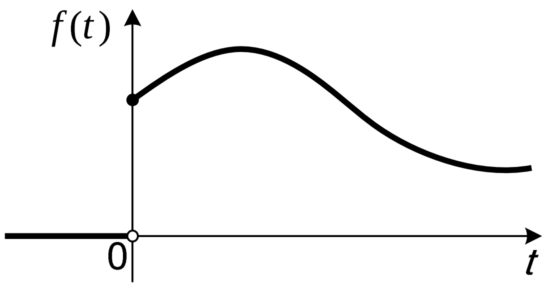
Применим теорему смещения «*умножение оригинала на* e^{at} *влечет за собой смещение переменной р на а* »:

$$\sin(kt) \leftrightarrow \frac{k}{p^2+k^2} \quad \Rightarrow \quad e^{at}\sin(kt) \leftrightarrow \frac{k}{(p-a)^2+k^2};$$

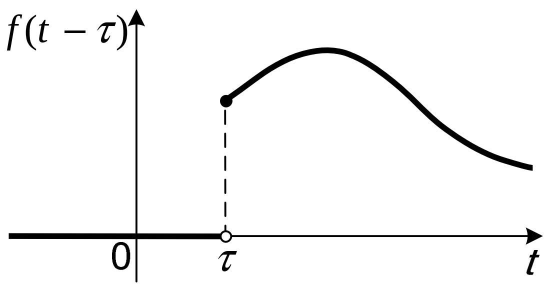
$$\cos(kt) \leftrightarrow \frac{p}{p^2+k^2} \quad \Rightarrow \quad e^{at}\cos(kt) \leftrightarrow \frac{p-a}{(p-a)^2+k^2}.$$

4) По теореме запаздывания можно найти изображения многих функций (в частности функций, описывающих импульсные процессы). Поясним смысл термина «запаздывание»: процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается как бы с опозданием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$.

Т.о. теорему запаздывания можно сформулировать так: *запаздывание оригинала на время* τ *соответствует умножению изображения на* $e^{-p\tau}$.



оригинал $f(t)$



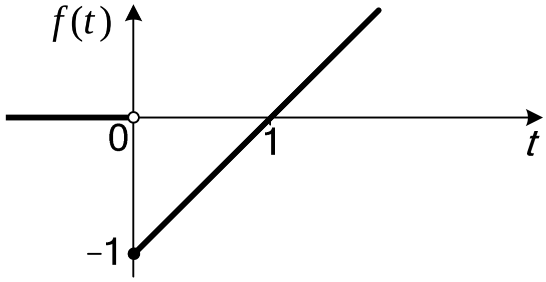
оригинал $f(t-\tau)$

Применение теоремы запаздывания для некоторых оригиналов см. в таблице выше.

Поясним данную теорему на примере нахождения изображения оригинала $f(t) = t - 1$.

Для того чтобы быть оригиналом, функция $f(t)$ должна удовлетворять условиям 1-3. В этом смысле исходную задачу можно понимать двояко.

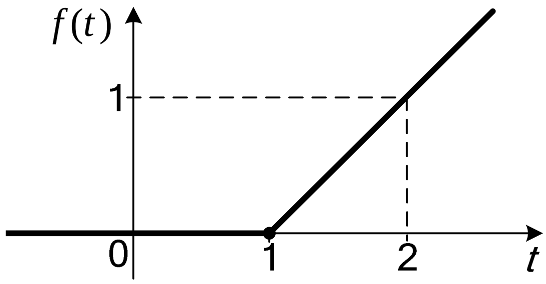
Если $f(t)=\begin{cases} t-1, & t \ge 0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$



то, используя свойство линейности и таблицу, получаем

$$f(t)=(t-1)\cdot\eta(t)=t-1 \leftrightarrow \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=F(p).$$

Если же $f(t)=\begin{cases} t-1, & t \ge 1, \\ 0, & t<1, \end{cases}$



т.е. $f(t)=(t-1)\cdot\eta(t-1)$, то используя свойство запаздывания, находим

$$f(t)=(t-1)\cdot\eta(t-1) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}\cdot e^{-p}=F(p).$$

5) $\dfrac{\sin t}{t} \leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}-arctg(p)$

Т.к. $f(t)=\sin t \leftrightarrow \dfrac{1}{p^2+1}$, то по теореме интегрирования изображения:

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty} F(z)dz$$

имеем $\dfrac{\sin t}{t} \leftrightarrow \displaystyle\int_p^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}dz = arctg(z)\Big|_p^{+\infty} =$

$$= \lim_{z\to+\infty} arctg(z) - arctg(p) = \frac{\pi}{2} - arctg(p).$$

Применение других теорем будет рассмотрено позже в примерах данной главы.

Пример 5. Найти изображение по оригиналу

$$f(t) = 9 + 7e^{2t} + 3t^2 + 2e^{3t} \cdot t - 3e^{-2t}\sin(5t).$$

Решение. Используем свойство линейности и таблицу

$$f(t) = 9\cdot 1 + 7\cdot e^{2t} + 3\cdot t^2 + 2\cdot\left(t\cdot e^{3t}\right) - 3\cdot\left(e^{-2t}\sin(5t)\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} 1 \leftrightarrow \dfrac{1}{p}; & e^{at} \leftrightarrow \dfrac{1}{p-a}; \\ t^2 \leftrightarrow \dfrac{2}{p^3}; & t\cdot e^{at} \leftrightarrow \dfrac{1}{(p-a)^2}; \\ \multicolumn{2}{l}{e^{at}\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{(p-a)^2+k^2}} \end{array} \right| =$$

$$\leftrightarrow 9\cdot\frac{1}{p} + 7\cdot\frac{1}{p-2} + 3\cdot\frac{2}{p^3} + 2\cdot\frac{1}{(p-3)^2} - 3\cdot\frac{5}{(p+2)^2+5^2}.$$

Получили искомое изображение

$$F(p) = \frac{9}{p} + \frac{7}{p-2} + \frac{6}{p^3} + \frac{2}{(p-3)^2} - \frac{15}{(p+2)^2+25}.$$

Пример 6. По теореме смещения найти изображение оригинала $f(t) = sh(2t)\cdot\sin(3t)$.

Решение. Чтобы воспользоваться теоремой смещения, запишем гиперболический синус по определению $sh(2t) = \dfrac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}$.

Тогда

$$f(t) = sh(2t)\cdot\sin(3t) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\cdot\sin(3t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t}\cdot\sin(3t) - e^{-2t}\cdot\sin(3t)\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \textit{используем свойство линейности + таблицу} \\ e^{at}\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{k}{(p-a)^2+k^2} \end{array} \right| \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{(p-2)^2+3^2} - \frac{3}{(p+2)^2+3^2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{(p-2)^2+3^2} - \frac{1}{(p+2)^2+3^2}\right).$$

Пример 7. По теореме дифференцирования изображения найти изображение оригинала $t\cdot\sin(kt)$, $t^2\cdot\sin(kt)$.

Решение. Оригиналу $f(t)=\sin(kt)$ соответствует изображение

$$F(p)=\frac{k}{p^2+k^2}.$$

По теореме дифференцирования изображения имеем

$$t\cdot\sin(kt) \leftrightarrow -F'(p) = -\left(\frac{k}{p^2+k^2}\right)' = \frac{2pk}{\left(p^2+k^2\right)^2};$$

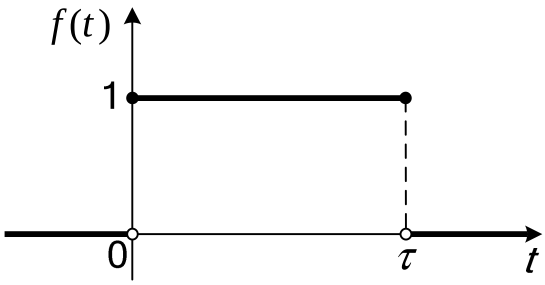
$$t^2\cdot\sin(kt) \leftrightarrow F''(p) = \left(\frac{k}{p^2+k^2}\right)'' = \left(\frac{-2pk}{\left(p^2+k^2\right)^2}\right)' =$$

$$= -2k\cdot\frac{1\cdot\left(p^2+k^2\right)^2 - p\cdot 2\cdot\left(p^2+k^2\right)\cdot 2p}{\left(p^2+k^2\right)^4} = -2k\cdot\frac{\left(p^2+k^2\right)-4p^2}{\left(p^2+k^2\right)^3}.$$

Т.о. $t\cdot\sin(kt) \leftrightarrow \dfrac{2pk}{\left(p^2+k^2\right)^2}$, $t^2\cdot\sin(kt) \leftrightarrow 2k\cdot\dfrac{3p^2-k^2}{\left(p^2+k^2\right)^3}$.

Пример 8. Найти изображение единичного импульса

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & 0\le t\le\tau, \\ 0, & t<\tau. \end{cases}$$

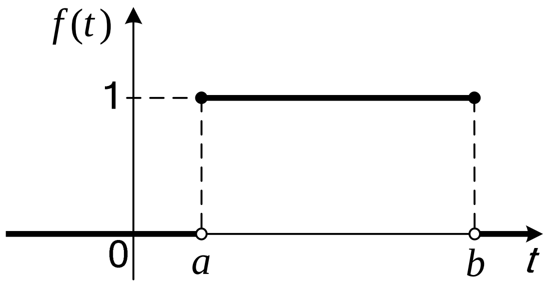


Решение. Данная функция описывает единичный импульс, который можно рассматривать как разность двух оригиналов: единичной функции $\eta(t)$ и «запаздывающей на время τ» единичной функции $\eta(t-\tau)$.

$f(t)=\eta(t)-\eta(t-\tau)\leftrightarrow\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}\cdot e^{-p\tau}$. Символически единичный импульс будем обозначать $f(t)=1_{[0,\tau]}=\eta(t)-\eta(t-\tau)$.

Аналогично, можно получить изображение единичного импульса, длившегося от a до b:

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,b],\\ 0, & t\notin[a,b].\end{cases}$$

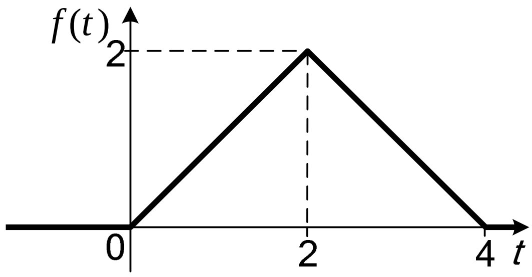


$$f(t)=1_{[a,b]}=\eta(t-a)-\eta(t-b)\leftrightarrow\frac{1}{p}\cdot e^{-ap}-\frac{1}{p}\cdot e^{-bp}.$$

Очевидно, что произвольный импульс $f(t)=\begin{cases}f(t), & t\in[a,b],\\ 0, & t\notin[a,b]\end{cases}$ можно представить в виде $\underline{f(t)=f(t)\cdot 1_{[a,b]}}$.

Пример 9. Найти изображение оригинала

$$f(t)=\begin{cases}t, & t\in[0,2],\\ 4-t, & t\in[2,4],\\ 0, & t\notin[0,4].\end{cases}$$



Решение. Запишем данную функцию одним аналитическим выражением, используя функции Хевисайда $\eta(t)$, $\eta(t-\tau)$:

$$f(t)=t\cdot 1_{[0,2]}+(4-t)\cdot 1_{[2,4]}=t\cdot(\eta(t)-\eta(t-2))+(4-t)\cdot(\eta(t-2)-\eta(t-4))=$$

$$= t\cdot\eta(t) - (t-4+t)\cdot\eta(t-2) + (t-4)\cdot\eta(t-4) =$$

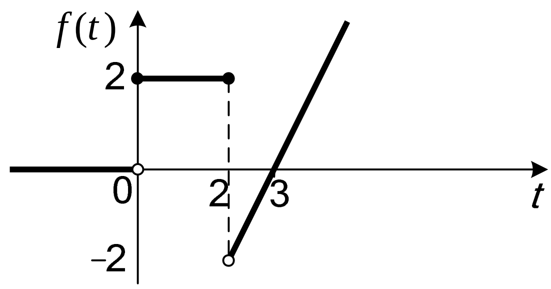
$$= t\cdot\eta(t) - 2(t-2)\cdot\eta(t-2) + (t-4)\cdot\eta(t-4) =$$

$$= \left| \, t\cdot\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}, \quad (t-\tau)\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}\cdot e^{-p\tau} \, \right| \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{p^2} - 2\cdot\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p} + \cdot\frac{1}{p^2}\cdot e^{-4p} = F(p).$$

Пример 10. Найти изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 \le t \le 2, \\ 2t-6, & t > 2. \end{cases}$$



Решение. Запишем данную функцию одним аналитическим выражением, используя функции Хевисайда $\eta(t),\ \eta(t-\tau)$:

$$f(t) = 2\cdot 1_{[0,2]} + (2t-6)\cdot 1_{[2,+\infty)} =$$

$$= 2\cdot(\eta(t) - \eta(t-2)) + (2t-6)\cdot\eta(t-2) =$$

$$= t\cdot\eta(t) + (-2+2t-6)\cdot\eta(t-2) = 2\cdot\eta(t) + 2(t-4)\cdot\eta(t-2) =$$

$$= t\cdot\eta(t) + 2(t-2-2)\cdot\eta(t-2) =$$

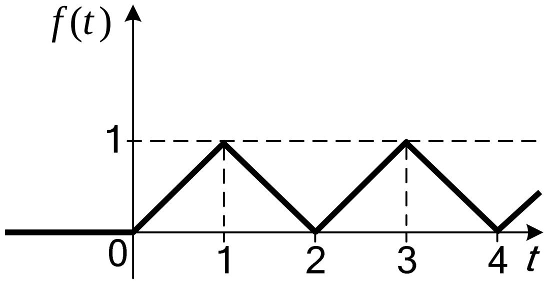
$$= 2\cdot\underbrace{\eta(t)}_{табл} + 2\underbrace{(t-2)\cdot\eta(t-2)}_{табл} - 4\cdot\underbrace{\eta(t-2)}_{табл} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}, \quad \eta(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{p}\cdot e^{-p\tau}, \\ t\cdot\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2} \quad (t-\tau)\cdot\eta(t-\tau) \leftrightarrow \frac{1}{p^2}\cdot e^{-p\tau} \end{array} \right| \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2\cdot\frac{1}{p} + 2\cdot\frac{1}{p^2}\cdot e^{-2p} - 4\cdot\frac{1}{p}\cdot e^{-2p} = F(p).$$

Пример 11. Найти изображение оригинала

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & 0+2k\le t\le 1+2k, \qquad k\in Z\\ 2-t, & 1+2k\le t\le 2+2k,\end{cases}$$



Решение. Оригинал $f(t)$ является периодическим (период $T=2$).

Для нахождения изображения применим теорему для периодического оригинала: $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-pT}}\cdot\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$.

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\int\limits_0^2 f(t)\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\left(\int\limits_0^1 t\cdot e^{-pt}dt+\int\limits_1^2(2-t)\cdot e^{-pt}dt\right)=$$

$$=\left|\ \int t\cdot e^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p^2}\cdot(px+1)+C\ \right|=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\left(\left(-\frac{e^{-pt}}{p^2}\cdot(px+1)\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{2e^{-pt}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^2}\cdot(px+1)\right)\Bigg|_1^2\right)=$$

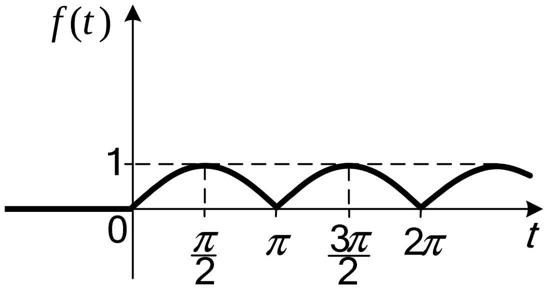
$$=\frac{1}{1-e^{-2p}}\cdot\left(-\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2}+\frac{1}{p^2}-\frac{2e^{-2p}}{p}+\frac{e^{-2p}(2p+1)}{p^2}+\frac{2e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}(p+1)}{p^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{-2p}}{\left(1-e^{-2p}\right)\cdot p^2}\cdot\left(-e^{p}(p+1)+e^{2p}-2p+2p+1+2pe^{p}-e^{p}(p+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(e^{2p}-1\right)\cdot p^2}\cdot\left(e^{2p}-2e^{p}+1\right)=\frac{\left(e^{p}-1\right)^2}{\left(e^{2p}-1\right)\cdot p^2}=\frac{e^{p}-1}{\left(e^{p}+1\right)\cdot p^2}=F(p).$$

Пример 12. Найти изображение оригинала

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ |\sin t|, & t\ge 0.\end{cases}$$



Решение. Данный оригинал $f(t)=\sin t,\ \ t\in[0+\pi k,\pi+\pi k),\ \ k\in Z$ является периодическим (период $\mathrm{T}=\pi$).

Для нахождения изображения применим теорему для периодического оригинала: $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-pT}}\cdot\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$.

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\left(-\frac{e^{-pt}}{p^2+1}\cdot(\cos t+p\cdot\sin t)\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\left(-\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}\cdot(\cos\pi+p\cdot\sin\pi)+\frac{e^0}{p^2+1}\cdot(\cos 0+p\cdot\sin 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-p\pi}}\cdot\left(\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}\right)=\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}\cdot\frac{1}{p^2+1}=F(p).$$

Пример 13. Найти изображение оригинала $g(t)=\dfrac{1-\cos(2t)}{t}$.

Решение. Так как $f(t)=1-\cos(2t)\leftrightarrow\dfrac{1}{p}-\dfrac{p}{p^2+4}$, то по теореме интегрирования изображения: $\dfrac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int\limits_p^{+\infty}F(z)dz$ имеем

$$g(t)=\frac{1-\cos(2t)}{t}\leftrightarrow\int\limits_p^{+\infty}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz=\left(\ln(z)-\frac{1}{2}\cdot\ln(z^2+4)\Big|\right)_p^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{z^2}{z^2+4}\right)\Bigg|_p^{+\infty}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{z\to+\infty}\ln\left(\frac{z^2}{z^2+4}\right)}_{\to\ \ln 1}-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{p^2}{p^2+4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{p^2}{p^2+4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{p^2+4}{p^2}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}\right)=G(p).$$

Пример 14. Найти изображение оригинала $g(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^{\tau}\,d\tau$.

Решение. Можно вычислить интеграл и найти изображение по таблице. Однако проще в данном случае воспользоваться теоремой об интегрировании оригинала: $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$. Т.к. $f(t)=t\cdot e^t \leftrightarrow \frac{1}{(p-1)^2}=F(p)$, то имеем

$$g(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^{\tau}\,d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}=\frac{1}{p\cdot(p-1)^2}=G(p).$$

3. Нахождение оригиналов по изображениям

<u>I способ.</u> Сведение заданного изображения $F(p)$ к таблице изображений с помощью простейших преобразований и использования теорем преобразования Лапласа.

Пример 15. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{p-3}{p^2+4}-\frac{5}{p^3}$.

Решение. Сведем заданное изображение к сумме табличных изображений и используем теорему линейности:

$$F(p)=\frac{p-3}{p^2+4}-\frac{5}{p^3}=\frac{p}{p^2+4}-\frac{3}{p^2+4}-\frac{5}{p^3}=$$

$$= \underbrace{\frac{p}{p^2+4}}_{табл} - \frac{3}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{табл} - \frac{5}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{p^3}}_{табл} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left| \frac{p}{p^2+k^2} \leftrightarrow \cos(kt), \quad \frac{k}{p^2+k^2} \leftrightarrow \sin(kt), \quad \frac{n!}{p^{n+1}} \leftrightarrow t^n \right| \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \cos(2t) - \frac{3}{2}\cdot\sin(2t) - \frac{5}{2}\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(2\cos(2t) - 3\cdot\sin(2t) - 5\cdot t^2\right) = f(t).$$

Пример 16. Найти оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{4}{p^2-4p+29} - \frac{7p}{(p+2)^4}.$$

Решение. Преобразуем изображение $F(p)$ таким образом, чтобы можно было воспользоваться таблицей изображений с использованием теорем линейности и смещения. Для этого в первой дроби выделим полный квадрат в знаменателе:

$$F(p) = \frac{4}{p^2-4p+29} - \frac{7p}{(p+3)^4} = \frac{4}{\left(p^2-4p+4\right)+25} - 7\cdot\frac{(p+3)-3}{(p+3)^4} =$$

$$= \frac{4}{(p-2)^2+25} - 7\frac{1}{(p+3)^3} + 21\cdot\frac{1}{(p+3)^4} =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\underbrace{\frac{5}{(p-2)^2+25}}_{табл} - \frac{7}{2}\cdot\underbrace{\frac{2!}{(p+3)^3}}_{табл} + \frac{21}{3!}\cdot\underbrace{\frac{3!}{(p+3)^4}}_{табл} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left| \frac{k}{(p-a)^2+k^2} \leftrightarrow e^{at}\cdot\sin(kt), \quad \frac{n!}{(p-a)^{n+1}} \leftrightarrow e^{at}\cdot t^n \right| \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{4}{5}\cdot e^{2t}\sin(5t) - \frac{7}{2}\cdot e^{-2t}\cdot t^2 + \frac{21}{6}\cdot e^{-2t}\cdot t^3 = f(t)$$

Пример 17. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{2p-5}{p^2-6p+11}$.

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе и преобразуем данную дробь так, чтобы можно было воспользоваться теоремой смещения:

$$F(p)=\frac{2p-5}{\left(p^2-6p+9\right)+2}=\frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2}=$$

$$=2\cdot\underbrace{\frac{p-3}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}_{табл}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}_{табл}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left|\ e^{at}\cos(kt)\leftrightarrow\frac{p-a}{(p-a)^2+k^2},\quad e^{at}\sin(kt)\leftrightarrow\frac{k}{(p-a)^2+k^2}\right|\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2\cdot e^{3t}\cdot\cos\left(\sqrt{2}\,t\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{3t}\cdot\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)=f(t).$$

<u>**II способ.**</u> Если изображение $F(p)$ есть правильная рациональная дробь, то эту дробь представляют в виде суммы простейших дробей, для каждой из которой находят оригиналы, используя свойства преобразования Лапласа и по таблице изображений.

Пример 18. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-6p+5}$.

Решение. Т.к. $p^2-6p+5=\left|\begin{array}{l} D=36-20=16 \\ p_1=1,\quad p_2=5\end{array}\right|=(p-1)\cdot(p-5)$, то

$$F(p)=\frac{p+3}{(p-1)\cdot(p-5)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-5}.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты

$$A=\left.\frac{p+3}{(p-5)}\right|_{p=1}=\frac{4}{-4}=-1,\qquad B=\left.\frac{p+3}{(p-1)}\right|_{p=5}=\frac{8}{4}=2.$$

Получаем

$$F(p)=-\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}+2\cdot\underbrace{\frac{1}{p-5}}_{табл}\leftrightarrow\left|\ e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{p-a}\right|\leftrightarrow -e^{t}+2e^{5t}=f(t).$$

Пример 19. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{9p-4}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Представим правильную дробь $\dfrac{9p-4}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}$ в виде суммы простейших дробей

$$F(p)=\frac{9p-4}{p(p-1)\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Затем с помощью стандартной процедуры находим коэффициенты A,B,C,D. Имеем равенство

$$9p-4=A(p-1)\left(p^2+4\right)+B\,p\left(p^2+4\right)+(Cp+D)p(p-1),$$

которое справедливо для всех значений p.

$p=0:\qquad -4=A(-1)\cdot 4 \quad\Rightarrow\quad A=1,$

$p=1:\qquad 9-4=B\,(1+4) \quad\Rightarrow\quad B=1,$

при p^3: $\quad 0=A+B+C \quad\Rightarrow\quad C=-2,$

при p^2: $\quad 0=-A-C+D \quad\Rightarrow\quad D=-1.$

Получаем $F(p)=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{-2p-1}{p^2+4}$, и с помощью простейших преобразований сводим получившиеся дроби к таблице изображений

$$F(p)=\underbrace{\frac{1}{p}}_{табл}+\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}-2\cdot\underbrace{\frac{p}{p^2+4}}_{табл}-\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{табл}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left|\ \frac{p}{p^2+k^2}\leftrightarrow\cos(kt),\quad \frac{k}{p^2+k^2}\leftrightarrow\sin(kt),\quad \frac{1}{p}\leftrightarrow 1,\quad \frac{1}{p-a}\leftrightarrow e^{at}\ \right|\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 1+e^{t}-2\cos(2t)-\frac{1}{2}\cdot\sin(2t)=f(t).$$

Пример 20. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{5p+4}{p^2(p-1)(p+2)}$.

Решение. Представим изображение в виде суммы простейших дробей

$$F(p)=\frac{5p+4}{p^2(p-1)(p+2)}=\frac{A_0}{p^2}+\frac{A_1}{p}+\frac{B_0}{p-1}+\frac{C_0}{p+2}.$$

Неизвестные коэффициенты можно найти как в предыдущем примере. Т.к. в данном случае участвуют только простейшие дроби I и II типа, то применим для нахождения коэффициентов другой способ:

$$A_0=\left.\frac{5p+4}{(p-1)(p+2)}\right|_{p=0}=\frac{4}{-2}=-2,$$

$$A_1=\left.\left(\frac{5p+4}{(p-1)(p+2)}\right)'\right|_{p=0}=\left.\left(\frac{5p+4}{p^2+p-2}\right)'\right|_{p=0}=$$

$$=\left.\frac{5\left(p^2+p-2\right)-(5p+4)(2p+1)}{\left(p^2+p-2\right)^2}\right|_{p=0}=\frac{-10-4}{4}=-\frac{7}{2}.$$

$$B_0=\left.\frac{5p+4}{p^2(p+2)}\right|_{p=1}=\frac{9}{3}=3,\qquad C_0=\left.\frac{5p+4}{p^2(p-1)}\right|_{p=-2}=\frac{-10+4}{4\cdot(-3)}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, получаем

$$F(p)=-2\cdot\underbrace{\frac{1}{p^2}}_{табл}-\frac{7}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{p}}_{табл}+3\cdot\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{p+2}}_{табл}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left|\ \frac{1}{p}\leftrightarrow 1,\quad \frac{1}{p^2}\leftrightarrow t,\quad \frac{1}{p-a}\leftrightarrow e^{at}\ \right|\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow -2\cdot t-\frac{7}{2}\cdot 1+3\cdot e^t+\frac{1}{2}\cdot e^{-2t}=-2t-3{,}5+3\cdot e^t+0{,}5\cdot e^{-2t}=f(t).$$

III способ основан на теореме об обратном преобразовании Лапласа.

Теорема 3. Формула обращения Римана-Меллина. преобразования Лапласа.

Если функция $f(t)$ *является оригиналом, а функция* $F(p)$ *- её изображением, то в любой точке* t*, где оригинал* $f(t)$ *непрерывен, имеет место формула*

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}\,F(p)\,dp}, \quad s>s_0,$$

где интегрирование производится по любой бесконечной вертикальной прямой $\operatorname{Re} p=s>s_0$, *где* s_0 *- показатель роста оригинала* $f(t)$.

Вычисление несобственного интеграла в формуле обращения для произвольной функции $F(p)$ довольно трудоёмко. Поэтому ограничимся частным случаем.

Теорема 4.

Пусть функция $F(p)$ *комплексной переменной р аналитична* (*регулярна*) *во всей плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек* $p_1, p_2, ..., p_n$, *расположенных в полуплоскости* $\operatorname{Re} p<s_0$. *Если* $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$ *и* $F(p)$ *абсолютна интегрируема вдоль любой вертикальной прямой* $\operatorname{Re} p=s>s_0$, *то* $F(p)$ *является изображением и*

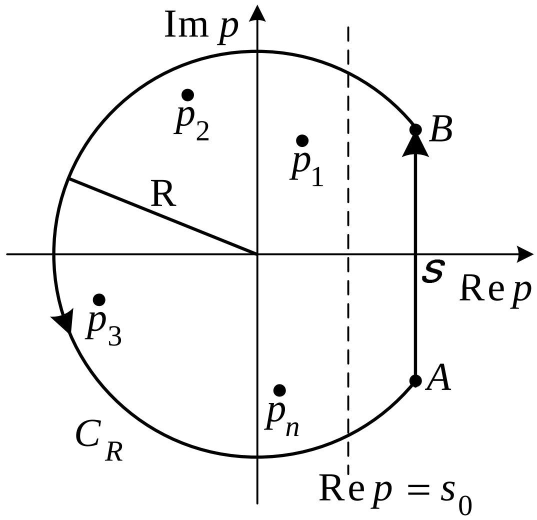
$$\boxed{F(p)\leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p), p_k\right]=f(t)}.$$

Докажем эту теорему.

Сведем интеграл в формуле Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}\,F(p)\,dp$$

к интегралу по замкнутому контуру. Контур Γ составим из отрезка AB прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$, и дуги C_R окружности $|p| = R$, расположенной слева от отрезка и содержащей внутри себя все особые точки функции $F(p)$. По основной теореме о вычетах



$$\oint_{\Gamma} e^{pt} F(p) dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{pt} F(p),\ p_k\right].$$

По свойству аддитивности интеграла

$$\oint_{\Gamma} e^{pt} F(p) dp = \int_{AB} e^{pt} F(p) dp + \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp.$$

Устремим $R \to +\infty$. По лемме Жордано (в условиях данной теоремы условия леммы выполняются) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp = 0$, а для второго интеграла получаем $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{AB} e^{pt} F(p) dp = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\ dp$.

Поэтому в пределе получаем

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\ dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{pt} F(p),\ p_k\right],$$

следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\ dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[e^{pt} F(p),\ p_k\right].$$

Пример 21. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

Решение. Функция

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{1}{p(p-2i)(p+2i)}$$

имеет полюсы первого порядка $p_1=0;\ p_2=2i;\ \ p_3=-2i$.

Тогда оригинал равен $f(t)=\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\ p_k\right],\quad p_k$ – полюсы $F(p)$.

Вычислим вычеты функции $e^{pt}\,F(p)$ в полюсах:

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p), p_1=0\right]=\left.\frac{e^{pt}}{\left(p^2+4\right)}\right|_{p=0}=\frac{e^0}{4}=\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\ p_2=2i\right]=\left.\frac{e^{pt}}{p(p+2i)}\right|_{p=2i}=\frac{e^{2it}}{2i\cdot 4i}=-\frac{1}{8}e^{2it},$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\ p_3=-2i\right]=\left.\frac{e^{pt}}{p(p-2i)}\right|_{p=-2i}=\frac{e^{-2it}}{(-2i)\cdot(-4i)}=-\frac{1}{8}e^{-2it}.$$

Следовательно,

$$F(p)\leftrightarrow f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}e^{2it}-\frac{1}{8}e^{-2it}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right)=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}\cdot\sin^2 t.$$

Пример 22. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-1)^2\cdot p^3}$.

Решение. Функция $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-1)^2\cdot p^3}$ имеет два полюса: $p_1=1$ кратности 2 и $p_2=0$ кратности 3.

Вычислим вычеты функции $e^{pt}\,F(p)$ в полюсах:

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p), p_1=1\right]=\frac{1}{1!}\left(e^{pt}\cdot\frac{p+2}{p^3}\right)'\Bigg|_{p=1}=$$

$$=\left(te^{pt}\cdot\frac{p+2}{p^3}+e^{pt}\cdot\frac{p^3-(p+2)\cdot 3p^2}{p^6}\right)\Bigg|_{p=1}=3t\cdot e^t-8e^t=e^t(3t-8),$$

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p), p_2=0\right]=\frac{1}{2!}\left(e^{pt}\cdot\frac{p+2}{(p-1)^2}\right)''\Bigg|_{p=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(te^{pt}\,\frac{p+2}{(p-1)^2}+e^{pt}\,\frac{(p-1)^2-(p+2)\cdot 2(p-1)}{(p-1)^4}\right)'\Bigg|_{p=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(te^{pt}\left(\frac{t(p+2)}{(p-1)^2}-\frac{p+5}{(p-1)^3}\right)+e^{pt}\left(-\frac{t(p+5)}{(p-1)^3}-\frac{(p-1)^3-3(p+5)(p-1)^2}{(p-1)^6}\right)\right)\Bigg|_{p=0}=$$

$$=\frac{e^{pt}}{2}\left(t^2\,\frac{p+2}{(p-1)^2}-2t\,\frac{p+5}{(p-1)^3}+\frac{2p+16}{(p-1)^4}\right)\Bigg|_{p=0}=\frac{1}{2}\left(2t^2+10t+16\right)=t^2+5t+8.$$

Следовательно, оригинал

$$f(t)=\sum_{k=1}^{2}\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\ p_k\right]=e^t(3t-8)+t^2+5t+8.$$

Видим, что если полюсы кратные, то вычеты вычисляются довольно трудоемко, поэтому данный пример удобнее решать с помощью разложения изображения на простейшие дроби:

$$F(p)=\frac{p+2}{(p-1)^2\cdot p^3}=\frac{A_0}{(p-1)^2}+\frac{A_1}{p-1}+\frac{B_0}{p^3}+\frac{B_1}{p^2}+\frac{B_2}{p}.$$

$$p+2=A_0p^3+A_1p^3(p-1)+B_0(p-1)^2+B_1p(p-1)^2+B_2p^2(p-1)^2$$

$p=1:\ \ 3=A_0$, $\qquad p=0:\ \ 2=B_0$,

при $p^4:\ \ 0=A_1+B_2$,

при $p^3:\ \ 0=A_0-A_1+B_1-2B_2 \ \Rightarrow\ A_1-B_1+2B_2=3$,

при $p^2:\ \ 0=B_0-2B_1+B_2 \ \Rightarrow\ 2B_1-B_2=2$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A_0 = 3, \\ B_0 = 2, \\ A_1 + B_2 = 0, \\ A_1 - B_1 + 2B_2 = 3, \\ 2B_1 - B_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 3, \\ B_0 = 2, \\ B_2 = -A_1, \\ B_1 = A_1 + 2B_2 - 3, \\ 2B_1 - B_2 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 3, \\ B_0 = 2, \\ B_2 = -A_1, \\ B_1 = -A_1 - 3, \\ -2A_1 - 6 + A_1 = 2. \end{cases}$$

Получаем $A_0 = 3,\ B_0 = 2,\ A_1 = -8,\ B_2 = 8,\ B_1 = 5.$

Следовательно, изображение

$$F(p) = \frac{3}{(p-1)^2} - \frac{8}{p-1} + \frac{2}{p^3} + \frac{5}{p^2} + \frac{8}{p} =$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{(p-1)^2}}_{табл} - 8 \cdot \underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл} + \underbrace{\frac{2}{p^3}}_{табл} + 5 \cdot \underbrace{\frac{1}{p^2}}_{табл} + 8 \cdot \underbrace{\frac{1}{p}}_{табл} \leftrightarrow$$

$$= 3 \cdot t e^t - 8 \cdot e^t + t^2 + 5t + 8 = f(t).$$

Пример 23. Найти оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{2p^2 + p}{(p-1)(p+1)(p+2)}.$$

Решение. Функция $F(p) = \dfrac{2p^2 + p}{(p-1)(p+1)(p+2)}$ имеет три простых полюса: $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ и $p_3 = -2$. Поэтому удобно применить для нахождения оригинала вычеты

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re} s\left[e^{pt} F(p),\ p_k\right] =$$

$$= \left.\frac{\left(2p^2 + p\right) \cdot e^{pt}}{(p+1)(p+2)}\right|_{p=1} + \left.\frac{\left(2p^2 + p\right) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p+2)}\right|_{p=-1} + \left.\frac{\left(2p^2 + p\right) \cdot e^{pt}}{(p-1)(p+1)}\right|_{p=-2} =$$

$$= \frac{3 \cdot e^t}{6} + \frac{e^{-t}}{-2} + \frac{6 \cdot e^{2t}}{3} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} + 2e^{2t} = sh(t) + 2e^{2t} = f(t).$$

4. Свертка оригиналов, её приложения. Интегралы Дюамеля

Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ *называется функция*

$$h(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Свертка обозначается символом $h(t)=f(t)*g(t)$.

Свойства свертки:

1. Если $f(t)$ и $g(t)$ оригиналы, то свертка этих функций $f(t)*g(t)$ тоже функция-оригинал.

2. Свертка функций коммутативна:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=g(t)*f(t).$$

3. Свертка функций ассоциативна

$$(f(t)*g(t))*h(t)=f(t)*(g(t)*h(t)).$$

Теорема 5.

Изображение свертки двух оригиналов $f(t)$ *и* $g(t)$ *равно произведению соответствующих изображений:*

$$f(t)*g(t)\leftrightarrow F(p)\cdot G(p),$$

где $f(t)\leftrightarrow F(p)$ *и* $g(t)\leftrightarrow G(p)$.

С помощью этой теоремы легко находить оригиналы для изображений $F(p)\cdot G(p)$.

Пример 24. Найти свертку функций $f(t)=e^t$ и $g(t)=t$ и её изображение.

Решение. *1 способ*. Вычислим свертку оригиналов по определению

$$e^t*t=\int_0^t e^{\tau}\cdot(t-\tau)\,d\tau=\left|\begin{array}{ll} u=t-\tau, & du=-d\tau \\ dv=e^{\tau}d\tau, & v=e^{\tau}\end{array}\right|=$$

$$=e^{\tau}\cdot(t-\tau)+\int e^{\tau}d\tau=\left(e^{\tau}\cdot(t-\tau)+e^{\tau}\right)\Big|_0^t=e^t-t-1.$$

Теперь по таблице изображений находим изображение свертки

$$e^t * t = e^t - t - 1 \leftrightarrow \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}.$$

2 способ. Найдем по таблице изображения функций

$$f(t) = e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1} = F(p) \quad \text{и} \quad g(t) = t = \frac{1}{p^2} = G(p).$$

Тогда по теореме о свертке: $f(t) * g(t) \leftrightarrow F(p) \cdot G(p)$ получаем:

$$e^t * t \leftrightarrow \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2(p-1)} = H(p).$$

Теперь найдем саму свертку. Полученное изображение $F(p)$ имеет полюсы $p_1 = 0$ кратности 2 и $p_2 = 1$ кратности 1. Вычислим вычеты функции $e^{pt} H(p) = \dfrac{e^{pt}}{p^2(p-1)}$.

$$\operatorname{Re}s\left[e^{pt} H(p),\ p = 0\right] = \left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right)'\Bigg|_{p=0} = \frac{t\,e^{pt}(p-1) - e^{pt}}{(p-1)^2}\Bigg|_{p=0} = -t - 1.$$

$$\operatorname{Re}s\left[e^{pt} H(p),\ p = 1\right] = \frac{e^{pt}}{p^2}\Bigg|_{p=1} = e^t.$$

Следовательно, $e^t * t \leftrightarrow -\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p-1} \leftrightarrow -t - 1 + e^t$.

Пример 25. Найти свертку функций $f(t) = \cos t$ и $g(t) = e^{2t}$ и её изображение, не вычисляя интеграл.

Решение. Найдем по таблице изображения функций

$$f(t) = \cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1} = F(p) \quad \text{и} \quad g(t) = e^{2t} = \frac{1}{p-2} = G(p).$$

Тогда по теореме о свертке получаем:

$$e^t * t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p-2} = \frac{p}{(p^2+1)(p-2)} = H(p).$$

Для этого методом неопределенных коэффициентов разложим дробь $\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)(p-2)}$ на простейшие дроби:

$$H(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)(p-2)}=\frac{A\,p+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-2}.$$

Т.е. справедливо равенство $p=(A\,p+B)(p-2)+C\left(p^2+1\right)$.

$p=2:\ 2=5C \quad\Rightarrow\quad C=\dfrac{2}{5}$,

при $p^2:\ \ 0=A+C \quad\Rightarrow\quad A=-\dfrac{2}{5}$,

при $p:\ \ 1=-2A+B \quad\Rightarrow\quad B=\dfrac{1}{5}$.

$$H(p)=\frac{-\frac{2}{5}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}+\frac{\frac{2}{5}}{p-2}=-\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{табл}+\frac{1}{5}\cdot\underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{табл}+\frac{2}{5}\cdot\underbrace{\frac{1}{p-2}}_{табл}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow-\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\cdot\sin t+\frac{2}{5}\cdot e^{2t}=\frac{1}{5}\left(2e^{2t}-2\cos t+\sin t\right)=\cos t * e^{2t}.$$

Одним из применений свертки является нахождение оригинала по изображению, когда заданное изображение есть произведение некоторых табличных изображений.

Пример 26. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. В данном случае $F(p)$ есть простейшая дробь IV типа. Для нахождения оригинала воспользуемся тем, что произведению изображений соответствует свертка оригиналов и тем, что $\dfrac{1}{p^2+1}\leftrightarrow\sin t$.

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\leftrightarrow\sin t*\sin t=\int_0^t\sin(\tau)\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$= \left| \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t) - \cos(2\tau - t))\, d\tau = \left(\frac{1}{2}\tau \cdot \cos(t) - \frac{1}{4}\cdot \sin(2\tau - t) \right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}t \cdot \cos(t) - \frac{1}{4}\cdot \sin(t) + \frac{1}{4}\cdot \sin(-t) = \frac{1}{2}(t\cos(t) - \sin(t)).$$

Другим применением свертки является вычисление некоторых видов интегралов. Например, интеграл вида $\int_0^t k(t-x)\cdot x(\tau)d\tau$ является сверткой двух функций $k(t)$ и $x(t)$. По теореме о свертке изображение данного интеграла равно произведению соответствующих изображений оригиналов $k(t)$ и $x(t)$:

$$\int_0^t k(t-x)\cdot x(\tau)d\tau = k(t) * x(t) \leftrightarrow K(p)\cdot X(p) = F(p).$$

Восстанавливая оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)$, получаем значение искомого интеграла.

Пример 27. Вычислить интеграл $\int_0^t e^{t-\tau}\cdot \sin(\tau)d\tau$.

Решение. Данный интеграл является сверткой функций e^t и $\sin(t)$, поэтому изображение данного интеграла есть произведение изображений $\frac{1}{p-1} \leftrightarrow e^t$ и $\frac{1}{p^2+1} \leftrightarrow \sin(t)$.

Получаем

$$\int_0^t e^{t-\tau}\cdot \sin(\tau)d\tau = e^t * \sin(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p^2+1} = F(p).$$

Найдем оригинал, соответствующий изображению $F(p)$.

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)\cdot\left(p^2+1\right)}=\left|\begin{array}{c}\text{простые полюсы}\\ p_1=1,\quad p_{2,3}=\pm i\end{array}\right|\leftrightarrow\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Re}s\left[e^{pt}F(p),p_k\right]=$$

$$=\left.\frac{e^{pt}}{\left(p^2+1\right)}\right|_{p=1}+\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)\cdot(p+i)}\right|_{p=i}+\left.\frac{e^{pt}}{(p-1)\cdot(p-i)}\right|_{p=-i}=$$

$$=\frac{e^t}{2}+\frac{e^{it}}{2i\cdot(i-1)}+\frac{e^{-it}}{2i\cdot(i+1)}=\frac{1}{2}\left(e^t+\frac{e^{it}}{-1-i}+\frac{e^{-it}}{-1+i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^t-\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+i\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^t-\cos t-\sin t\right).$$

Таким образом, $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\cdot\sin(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left(e^t-\cos t-\sin t\right).$

Важным применением свертки является решение некоторых видов интегральных уравнений, которое будет рассмотрено ниже в п. 2.5. «Приложение операционного исчисления».

Интегралы Дюамеля

Запишем с помощью теоремы об умножении изображений оригиналы для выражения вида $pF(p)\cdot G(p)$, где $f(t)\leftrightarrow F(p)$ *и* $g(t)\leftrightarrow G(p)$. Выражения такого вида часто встречаются в приложениях операционного исчисления.

С одной стороны,

$$pF(p)\cdot G(p)=(pF(p))\cdot G(p)=(pF(p)-f(0))\cdot G(p)+f(0)\cdot G(p),$$

с другой стороны,

$$pF(p)\cdot G(p)=(pG(p))\cdot F(p)=(pG(p)-g(0))\cdot F(p)+g(0)\cdot F(p).$$

По теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$pF(p)-f(0)\leftrightarrow f'(t)\quad\text{и}\quad pG(p)-g(0)\leftrightarrow g'(t).$$

Тогда по теореме 2.5 получаем

$$pF(p)\cdot G(p)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(0)\cdot g(t)+f'(t)*g(t),\\ \\ g(0)\cdot f(t)+g'(t)*f(t).\end{array}\right.$$

или развернутом виде, учитывая коммутативность свертки:

$$pF(p)G(p)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(0)g(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau, \\ f(0)g(t)+\int\limits_0^t f'(t-\tau)g(\tau)d\tau, \\ f(t)g(0)+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau, \\ f(t)g(0)+\int\limits_0^t f(t-\tau)g'(\tau)d\tau. \end{array}\right.$$

Каждая из этих формул называется интегралом Дюамеля.

Пример 28. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p^3}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Решение. Данное изображение можно представить в виде произведения

$$F(p)=\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)^2}=p\cdot\left(\frac{p}{p^2+1}\right)\cdot\left(\frac{p}{p^2+1}\right), \text{ причем } \frac{p}{p^2+1}\leftrightarrow\cos t,$$

то на основание формулы Дюамеля имеем

$$p\cdot\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\leftrightarrow\cos 0\cdot\cos(t)+(\cos t)'*\cos(t)=$$

$$=\cos(t)+\int\limits_0^t\sin(\tau)\cdot\cos(t-\tau)d\tau=\left|\;\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))\;\right|=$$

$$=\cos(t)+\frac{1}{2}\int\limits_0^t(\sin(t)+\sin(2\tau-t))\,d\tau=\cos(t)+\left.\left(\frac{1}{2}\tau\cdot\sin(t)-\frac{1}{4}\cdot\cos(2\tau-t)\right)\right|_0^t=$$

$$=\cos(t)+\frac{1}{2}t\cdot\sin(t)-\frac{1}{4}\cdot\cos(t)+\frac{1}{4}\cdot\cos(-t)=\cos(t)+\frac{1}{2}t\cdot\sin(t).$$

Таким образом, имеем

$$F(p)=\frac{p^3}{\left(p^2+1\right)^2}\leftrightarrow\cos(t)+\frac{1}{2}t\cdot\sin(t).$$

5. Приложения операционного исчисления

1) Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пусть требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 \cdot y^{(n)}(t) + a_1 \cdot y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-2} \cdot y''(t) + a_{n-1} \cdot y'(t) + a_n \cdot y(t) = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n)}(0) = y_0^{(n)}.$$

Начальные условия в этой задаче заданы в точке $t_0 = 0$. Если начальные условия задаются в другой точке $t_0 \neq 0$, то заменой аргумента $u = t - t_0$ их сдвигают в точку $u_0 = 0$.

Будем считать, что искомая функция $y(t)$, вместе с её рассматриваемыми производными и функция $f(t)$ являются оригиналами.

Пусть $y(t) \leftrightarrow Y(p)$ и $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0),$$
$$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0),$$
$$y'''(t) \leftrightarrow p^3 Y(p) - p^2 \cdot y(0) - p \cdot y'(0) - y''(0),\ \ldots,$$
$$y^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0).$$

Применим преобразования Лапласа и прейдем к операторному уравнению относительно изображения $Y(p)$

$$a_0\left(p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y_0' - \ldots - p\, y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)}\right) + \ldots +$$
$$+ a_{n-2}\left(p^2 Y(p) - p y_0 - y_0'\right) + a_{n-1}\left(pY(p) - y_0\right) + a_n Y(p) = F(p).$$

Находим из полученного линейного уравнения $Y(p)$ и восстанавливаем соответствующий ему оригинал $y(t)$, который в силу теоремы единственности является частным решением дифференциального уравнения.

Полученное решение $y(t)$ во многих случаях оказывается справедливым при всех значениях t, а не только при $t \geq 0$.

Пример 29. Решить операционным методом дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$ при условии $y(0) = 2,\ y'(0) = 6$.

Решение. К данному дифференциальному уравнению применим операционный метод. Пусть решение дифференциального уравнения является оригиналом $y(t)$ и ему соответствует изображение $Y(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 2,$$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 6.$$

Правая часть уравнения $f(t) = 12e^{3t} \leftrightarrow \dfrac{12}{p-3}$.

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение

$$p^2Y(p) - 2p - 6 - 3(pY(p) - 1) + 2Y(p) = \frac{12}{p-3}.$$

Отсюда $\quad Y(p)\cdot\left(p^2 - 3p + 2\right) = \dfrac{12}{p-3} + 2p + 3.$

Т.к. $p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$, то получаем

$$Y(p)\cdot(p-1)(p-2) = \frac{12}{p-3} + 2p + 3,$$

$$Y(p)\cdot(p-1)(p-2) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{p-3} \ \Rightarrow\ Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Т.к. изображение имеет простые полюсы $p_1 = 1,\ p_2 = 2$, и $p_3 = 3$, то применим для нахождения оригинала вычеты

$$y(t) = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left[e^{pt}\cdot\frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)},\ p_k\right] = \left(e^{pt}\,\frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-2)(p-3)}\right)\Bigg|_{p=1} +$$

$$+\left(e^{pt}\,\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-3)}\right)\Bigg|_{p=2}+\left(e^{pt}\,\frac{2p^2-6p+12}{(p-1)(p-2)}\right)\Bigg|_{p=3}=$$

$$=e^{1\cdot t}\cdot\frac{8}{(-1)(-2)}+e^{2\cdot t}\cdot\frac{8}{1\cdot(-1)}+e^{3\cdot t}\cdot\frac{12}{2\cdot 1}=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}.$$

Получили частное решение дифференциального уравнения

$$y(t)=4e^{t}-8e^{2t}+6e^{3t}.$$

Пример 30. Решить задачу Коши операционным методом

$$y''-4y'+3y=e^{2t}+\cos(t)$$
$$y(0)=1,\ y'(0)=3$$

Решение. К данному дифференциальному уравнению применим операционный метод. Пусть решение дифференциального уравнения является оригиналом $y(t)$ и ему соответствует изображение $Y(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$y'(t)\leftrightarrow\ pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$

$$y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-p\cdot y(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p-3.$$

Правая часть уравнения $f(t)=e^{2t}+\cos(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{p}{p^2+1}$.

Получаем

$$\left(p^2Y(p)-p-3\right)-4\left(pY(p)-1\right)+3\cdot Y(p)=\frac{1}{p-2}+\frac{p}{p^2+1}$$

$$Y(p)\cdot\left(p^2-4p+3\right)=\frac{1}{p-2}+\frac{p}{p^2+1}+p-1$$

Т.к. $p^2-4p+3=(p-1)(p-3)$, то

$$Y(p)=\frac{1}{(p-2)(p-1)(p-3)}+\frac{p}{\left(p^2+1\right)(p-1)(p-3)}+\frac{p-1}{(p-1)(p-3)},$$

$$Y(p)=\frac{1}{(p-2)(p-1)(p-3)}+\frac{p}{\left(p^2+1\right)(p-1)(p-3)}+\frac{1}{(p-3)}.$$

Найдем соответствующий оригинал для каждой дроби:

1. $$F_1(p)=\frac{1}{(p-2)(p-1)(p-3)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p-3}$$

$$1=A(p-1)(p-3)+B(p-2)(p-3)+C(p-2)(p-1),$$

$$p=2:\quad 1=A(2-1)(2-3)+0+0\ \Rightarrow A=1$$

$$p=1:\ 1=0+B(1-2)(1-3)+0\quad\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$p=3:\ 1=0+0+C(3-2)(3-1)\ \Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

$$F_1(p)=\underbrace{\frac{1}{p-2}}_{табл}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}+\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{p-3}}_{табл}\leftrightarrow e^{2t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}+\frac{1}{2}\cdot e^{3t}.$$

2. $$F_2(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p-1)(p-3)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p-3}\ .$$

$$p=(Ap+B)(p-1)(p-3)+C(p^2+1)(p-3)+D(p^2+1)(p-1).$$

$$p=1:1=0+C(1+1)(1-3)+0\quad\Rightarrow\ C=-\frac{1}{4},$$

$$p=3:\ 3=0+0+D(9+1)(3-1)\ \Rightarrow\ D=\frac{3}{20},$$

$$при\ \ p^3:\ 0=A+C+D\ \Rightarrow\quad A=\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{1}{10},$$

$$p=0:\ 0=3B-3C-D\quad\Rightarrow\ 3B+\frac{3}{4}-\frac{3}{20}=0\ \Rightarrow\ B=-\frac{1}{5}.$$

$$F_2(p)=\frac{1}{10}\cdot\frac{p-2}{p^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{p-3}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{табл}-\frac{1}{5}\cdot\underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{табл}-\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}+\frac{3}{20}\cdot\underbrace{\frac{1}{p-3}}_{табл}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{10}(\cos(t)-2\sin(t))-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{3}{20}\cdot e^{3t}.$$

3. $F_3(p)=\underbrace{\dfrac{1}{p-3}}_{\text{табл}}\leftrightarrow e^{3t}$.

$$Y(p)=F_1(p)+F_1(p)+F_3(p)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(e^{2t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}+\frac{1}{2}\cdot e^{3t}\right)+\left(\frac{1}{10}(\cos(t)-2\sin(t))-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{3}{20}\cdot e^{3t}\right)+e^{3t}.$$

Решение задачи Коши

$$y(t)=e^{2t}+\frac{1}{2}\cdot e^{t}+\frac{1}{2}\cdot e^{3t}+\frac{1}{10}(\cos(t)-2\sin(t))-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{3}{20}\cdot e^{3t}+e^{3t}=$$

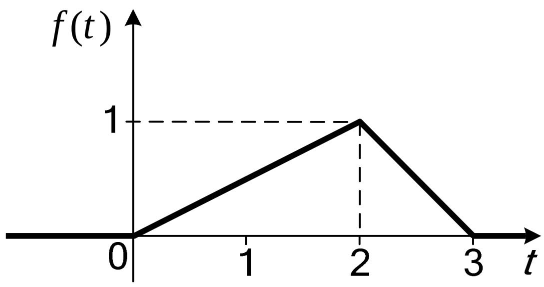
$$=\frac{1}{4}\cdot e^{t}+e^{2t}+\frac{33}{20}\cdot e^{3t}+\frac{1}{10}(\cos(t)-2\sin(t)).$$

При решении дифференциальных уравнений с импульсной и составной правой частью операционный метод имеет преимущество перед другими методами решения таких уравнений. Теорема запаздывания позволяет полностью сохранить изложенный порядок действий.

Пример 31. Найти решение дифференциального уравнения

$$y''+4y=\begin{cases} t/2, & 0\le t<2,\\ 3-t, & 2\le t\le 3,\\ 0, & t<0\ \text{или}\ t>3,\end{cases}$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0$$



Решение. С помощью единичной функции правую часть данного дифференциального уравнения можно записать одним аналитическим выражением $f(t)=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot 1_{[0,2]}+(3-t)\cdot 1_{[2,3]}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot(\eta(t)-\eta(t-2))+(3-t)\cdot(\eta(t-2)-\eta(t-3))=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\eta(t)-\eta(t-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot t-3+t\right)-(3-t)\cdot\eta(t-3)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\eta(t)-\frac{3}{2}\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2)+(t-3)\cdot\eta(t-3).$$

Таким образом, имеем

$$y'' + 4y = \frac{1}{2}\cdot t\cdot\eta(t) - \frac{3}{2}\cdot(t-2)\cdot\eta(t-2) + (t-3)\cdot\eta(t-3).$$

Операторное уравнение при нулевых начальных условиях имеет вид:

$$p^2Y(p) + 4Y(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}.$$

Отсюда $Y(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-2p} + \frac{1}{p^2(p^2+4)}e^{-3p}$.

Так как

$$\frac{1}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{p^2}}_{табл} - \frac{1}{8}\cdot\underbrace{\frac{2}{p^2+4}}_{табл} \leftrightarrow \frac{1}{4}\cdot t - \frac{1}{8}\cdot\sin 2t,$$

то по теореме запаздывания: $e^{-p\tau}F(p) \leftrightarrow f(t-\tau)\cdot\eta(t-\tau)$, получаем частное решение дифференциального уравнения:

$$y(t) = \frac{1}{16}\cdot(2t - \sin 2t) - \frac{3}{16}\cdot(2(t-2) - \sin 2(t-2))\cdot\eta(t-2) +$$
$$+\frac{1}{8}\cdot(2(t-3) - \sin 2(t-3))\cdot\eta(t-3).$$

2) Общее решение для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Заметим, что решив задачу Коши с произвольными начальными условиями, мы получим общее решение уравнения. Решение таких уравнений рассмотрим на следующем примере.

Пример 32. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = te^t$.

Решение. Пусть решение уравнения является оригиналом $y(t)$, которое удовлетворяет начальным условиям $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$, и ему соответствует изображение $Y(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - C_1,$$

$$y''(t) \leftrightarrow p^2Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - C_1p - C_2.$$

Правая часть уравнения $f(t) = t \cdot e^t \leftrightarrow \dfrac{1}{(p-1)^2}$.

Получаем

$$p^2Y(p) - C_1p - C_2 - 2\big(pY(p) - C_1\big) + Y(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

$$Y(p)\cdot(p-1)^2 = \frac{1}{(p-1)^2} + C_1p + C_2 - 2C_1 \quad \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)^4} + \frac{C_1p + C_2 - 2C_1}{(p-1)^2} = \frac{1}{3!}\frac{3!}{(p-1)^4} + \frac{C_1(p-1) + C_2 - C_1}{(p-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3!}\underbrace{\frac{3!}{(p-1)^4}}_{табл} + C_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл} + (C_2 - C_1)\cdot\underbrace{\frac{1}{(p-1)^2}}_{табл} \leftrightarrow \frac{1}{6}t^3e^t + C_1e^t + (C_2 - C_1)t\,e^t.$$

Решение задачи зависит от двух произвольных постоянных и представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{одн} = C_1e^t + (C_2 - C_1)t\,e^t$ и частного решения $y_{чн} = \dfrac{1}{6}t^3\,e^t$, следовательно, является общим решением линейного неоднородного уравнения:

$$y(t) = y_{одн}(t) + y_{чн}(t) = C_1e^t + (C_2 - C_1)t\,e^t + \frac{1}{6}t^3\,e^t.$$

Если найдено общее решение уравнения, оно может быть использовано для ***решения краевой задачи***. Пусть, например, задана краевая задача $y'' - 2y' + y = t\,e^t,\quad y(1) = e,\ y'(3) = 4e^3$.

Т.к. общее решение уже известно: $y(t)=e^t\left(C_1+(C_2-C_1)t+\frac{1}{6}t^3\right)$, то найдем $y'(t)=e^t\left(C_1+(C_2-C_1)t+\frac{1}{6}t^3\right)+e^t\left(C_2-C_1+\frac{1}{2}t^2\right)=$

$$=e^t\left(C_1+(C_2-C_1)t+\frac{1}{6}t^3+C_2-C_1+\frac{1}{2}t^2\right),$$

и вычислим значения произвольных постоянных, при которых выполняются краевые условия: $y(1)=e,\ y'(3)=4e^3$.

$$\begin{cases} e\left(C_1+(C_2-C_1)+\frac{1}{6}\right)=e, \\ e^3\left(C_1+3(C_2-C_1)+\frac{9}{2}+C_2-C_1+\frac{9}{2}\right)=4e^3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=\frac{5}{6}, \\ -3C_1+4C_2+9=4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3C_1=4C_2+5, \\ C_2=\frac{5}{6}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{25}{9}, \\ C_2=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Следовательно, решение краевой задачи равно

$$y(t)=e^t\left(\frac{25}{9}+\left(\frac{5}{6}-\frac{25}{9}\right)t+\frac{1}{6}t^3\right)=e^t\left(\frac{25}{9}-\frac{35}{18}t+\frac{1}{6}t^3\right)=\frac{e^t}{18}\left(50-35t+3t^3\right).$$

3) Решение задачи Коши линейного дифференциального уравнения с нулевыми начальными условиями с помощью интегралов Дюамеля.

При решении задачи Коши для линейного неоднородного уравнения необходимо находить изображение правой части уравнения, что в некоторых случаях может быть затруднительно или вообще невозможно. Формулы Дюамеля позволяют находить решение, не выписывая в явной форме изображение правой части.

Рассмотрим наряду с полной задачей

$$a_0y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+...+a_ny(t)=f(t),$$

$$y(0)=y'(0)=..=y^{(n-1)}(0)=0.$$

для функции $y(t)$ вспомогательную задачу для функции $\tilde{y}(t)$:

$$a_0\tilde{y}^{(n)}(t)+a_1\tilde{y}^{(n-1)}(t)+...+a_n\tilde{y}(t)=1 \quad ,$$

$$\tilde{y}(0)=\tilde{y}'(0)=..=\tilde{y}^{(n-1)}(0)=0.$$

Пусть $y(t)\leftrightarrow Y(p)$, $f(t)\leftrightarrow F(p)$, $\tilde{y}(t)\leftrightarrow \tilde{Y}(p)$. При нулевых начальных условиях $y^{(k)}(t)\leftrightarrow p^kY(p)$, $\tilde{y}^{(k)}(t)\leftrightarrow p^k\tilde{Y}(p)$, применяя к имеющимся уравнениям преобразование Лапласа, получим:

$$Y(p)\cdot(a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n)=F(p)$$

$$\tilde{Y}(p)\cdot(a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n)=\frac{1}{p}.$$

Поделив уравнения, имеем

$$\frac{Y(p)}{\tilde{Y}(p)}=p\cdot F(p) \;\Rightarrow\; Y(p)=p\cdot F(p)\cdot\tilde{Y}(p),$$

тогда применяем к правой части последнего равенства интегралы Дюамеля (см. п. 2.3):

$$Y(p)=p\tilde{Y}(p)F(p)\leftrightarrow \tilde{y}'(0)\cdot f(t)+\tilde{y}'(t)*f(t)$$

и, учитывая $\tilde{y}'(0)=0$, получаем решение исходного дифференциального уравнения: $y(t)=\tilde{y}'(t)*f(t)$.

Таким образом, вначале находим изображение $\tilde{Y}(p)$ из уравнения

$$\tilde{Y}(p)\cdot(a_0p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n)=\frac{1}{p},$$

затем восстанавливаем соответствующий оригинал $\tilde{y}(t)$, и решение исходного дифференциального уравнения находим через один из интегралов Дюамеля:

$$y(t)=\tilde{y}'(t)*f(t)=\left[\begin{array}{l}\int\limits_0^t\tilde{y}'(\tau)f(t-\tau)d\tau,\\ \int\limits_0^t\tilde{y}'(t-\tau)f(\tau)d\tau.\end{array}\right.$$

Пример 33. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = tg\,t$ с нулевыми начальными условиями $y(0) = y'(0) = 0$.

Решение. Функция $f(t) = tg\,t$ не является оригиналом (разрывы II рода), поэтому найти ее изображение невозможно. Решаем задачу с правой частью, равной 1, и с теми же начальными условиями:

$$\tilde{y}'' + \tilde{y} = 1, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}'(0) = 0.$$

Применим к данному уравнению операционный метод. Пусть $\tilde{y}(t) \leftrightarrow \tilde{Y}(p)$, тогда $\tilde{y}'(t) \leftrightarrow p\tilde{Y}(p)$, $\tilde{y}''(t) \leftrightarrow p^2\tilde{Y}(p)$.

$$p^2\tilde{Y}(p) + \tilde{Y}(p) = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{Y}(p)\left(p^2+1\right) = \frac{1}{p}$$

Получаем

$$\tilde{Y}(p) = \frac{1}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1};$$

$$1 = A\left(p^2+1\right) + p(Bp+C).$$

$p=0$: $\quad 1 = A$; при p^2: $0 = A + B \Rightarrow B = -1$; $\quad$ при p: $\quad 0 = C$.

$$\tilde{Y}(p) = \underbrace{\frac{1}{p}}_{табл} - \underbrace{\frac{p}{p^2+1}}_{табл} \leftrightarrow 1 - \cos t = \tilde{y}(t).$$

Получили $\tilde{y}(t) = 1 - \cos t$, $\tilde{y}'(t) = \sin t$.

Решение исходного дифференциального уравнения ищем по формуле:

$$y(t) = \tilde{y}'(t) * f(t) = \sin t * tg\,t = \left[\begin{array}{l} \int\limits_0^t \sin(\tau)\cdot tg(t-\tau)d\tau, \\ \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\cdot tg(\tau)d\tau. \end{array}\right.$$

Выбираем второй случай:

$$y(t) = \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\cdot tg(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \left(\sin t\cdot\cos\tau - \cos t\cdot\sin\tau\right)\cdot\frac{\sin\tau}{\cos\tau}d\tau =$$

$$=\sin t\cdot\int_0^t \sin\tau\,d\tau-\cos t\cdot\int_0^t \frac{\sin^2\tau}{\cos\tau}d\tau=-\sin t\cdot\left(\cos\tau\right)\Big|_0^t-\cos t\cdot\int_0^t\frac{1-\cos^2\tau}{\cos\tau}d\tau=$$

$$=-\sin t\cdot\left(\cos t-1\right)-\cos t\cdot\left(\int_0^t\frac{d\tau}{\cos\tau}-\int_0^t\cos\tau\,d\tau\right)=$$

$$=\sin t-\sin t\cdot\cos t-\cos t\cdot\left(\ln\left|tg\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin\tau\right)\Bigg|_=^t=$$

$$=\sin t-\sin t\cdot\cos t-\cos t\cdot\left(\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t-\underbrace{\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|}_{=0}\right)=$$

$$=\sin t-\sin t\cdot\cos t-\cos t\cdot\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sin t\cdot\cos t.$$

Решение исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$y(t)=\sin t-\cos t\cdot\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

4) Решение систем линейных дифференциальных уравнений.

Операционный метод решения одного линейного дифференциального уравнения переносится на решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, как однородных, так и неоднородных. Поэтому ограничимся рассмотрением примера.

Пример 34. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x''+x'-y'=1, & x(0)=1,\ x'(0)=1; \\ x'+x-y''=4e^t, & y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$$

Решение. Пусть $x(t)\leftrightarrow X(p),\ y(t)\leftrightarrow Y(p)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала имеем:

$$x'(t)\leftrightarrow pX(p)-1, \qquad y'(t)\leftrightarrow pY(p),$$
$$x''(t)\leftrightarrow p^2X(p)-p-1, \qquad y'(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-1.$$

Изображения правых частей уравнений: $1 \leftrightarrow \dfrac{1}{p},\ \ 4e^t \leftrightarrow \dfrac{4}{p-1}$.

Система в операторном виде запишется так:

$$\begin{cases} p^2X(p)-p-1+pX(p)-1-pY(p)=\dfrac{1}{p}, \\ pX(p)-1+X(p)-p^2Y(p)+1=\dfrac{4}{p-1}; \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(p^2+p\right)X(p)-pY(p)=\dfrac{1}{p}+p+2, \\ (p+1)X(p)-p^2Y(p)=\dfrac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Решаем эту линейную систему относительно $X(p)$, $Y(p)$, например, по правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p^2+p & -p \\ p+1 & -p^2 \end{vmatrix}=-p^2\left(p^2+p\right)+p(p+1)=-p(p+1)^2(p-1).$$

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{p}+p+2 & -p \\ \dfrac{4}{p-1} & -p^2 \end{vmatrix}=-p^2\left(\dfrac{1}{p}+p+2\right)+\dfrac{4p}{p-1}=\dfrac{4p}{p-1}-p(p+1)^2.$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p^2+p & \dfrac{1}{p}+p+2 \\ p+1 & \dfrac{4}{p-1} \end{vmatrix}=\left(p^2+p\right)\dfrac{4}{p-1}-(p+1)\left(\dfrac{1}{p}+p+2\right)=$$

$$=(p+1)\left(\dfrac{4p}{p-1}-\dfrac{(p+1)^2}{p}\right).$$

$$X(p)=\dfrac{\Delta_X}{\Delta}=\dfrac{\dfrac{4p}{p-1}-p(p+1)^2}{-p(p+1)^2(p-1)}=-\dfrac{4}{(p+1)^2(p-1)^2}+\dfrac{1}{p-1},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{(p+1)\left(\dfrac{4p}{p-1}-\dfrac{(p+1)^2}{p}\right)}{-p(p+1)^2(p-1)}=-\frac{4}{(p+1)(p-1)^2}+\frac{p+1}{p^2(p-1)}.$$

Восстановим оригиналы $x(t),\ y(t)$ по их изображениям:

$$X(p)=-\frac{4}{(p+1)^2(p-1)^2}+\frac{1}{p-1}=\frac{A_0}{(p+1)^2}+\frac{A_1}{p+1}+\frac{B_0}{(p-1)^2}+\frac{B_1}{p-1}+\frac{1}{p-1}.$$

$$A_0=-\left.\frac{4}{(p-1)^2}\right|_{p=-1}=-\frac{4}{4}=-1,\quad A_1=-\left.\left(\frac{4}{(p-1)^2}\right)'\right|_{p=-1}=\left.\frac{8}{(p-1)^3}\right|_{p=-1}=-1,$$

$$B_0=-\left.\frac{4}{(p+1)^2}\right|_{p=1}=-\frac{4}{4}=-1,\quad B_1=-\left.\left(\frac{4}{(p+1)^2}\right)'\right|_{p=1}=\left.\frac{8}{(p+1)^3}\right|_{p=1}=1.$$

$$X(p)=-\underbrace{\frac{1}{(p+1)^2}}_{табл}-\underbrace{\frac{1}{p+1}}_{табл}-\underbrace{\frac{1}{(p-1)^2}}_{табл}+2\cdot\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл}\leftrightarrow -te^{-t}-e^{-t}-te^{t}+2e^{t}=$$

$$=-t\left(e^t+e^{-t}\right)+\left(e^t-e^{-t}\right)+e^t=2\cdot(sh\,t-t\cdot ch\,t)+e^t=x(t).$$

Изображение $Y(p)$ разложим на простейшие дроби:

1) $$-\frac{4}{(p+1)(p-1)^2}=\frac{A_0}{p+1}+\frac{B_0}{(p-1)^2}+\frac{B_1}{p-1}.$$

$$A_0=-\left.\frac{4}{(p-1)^2}\right|_{p=-1}=-\frac{4}{4}=-1,$$

$$B_0=-\left.\frac{4}{p+1}\right|_{p=1}=-\frac{4}{2}=-2,\qquad B_1=-\left.\left(\frac{4}{p+1}\right)'\right|_{p=1}=\left.\frac{4}{(p+1)^2}\right|_{p=1}=1.$$

2) $$\frac{p+1}{p^2(p-1)}=\frac{C_0}{p^2}+\frac{C_1}{p}+\frac{D_0}{p-1}.$$

$$C_0=\left.\frac{p+1}{p-1}\right|_{p=0}=-1,\quad C_1=\left.\left(\frac{p+1}{p-1}\right)'\right|_{p=0}=\left.\frac{-2}{(p-1)^2}\right|_{p=0}=-2,\quad D_0=\left.\frac{p+1}{p^2}\right|_{p=1}=2.$$

Имеем

$$Y(p) = -\underbrace{\frac{1}{p+1}}_{табл} - 2\cdot\underbrace{\frac{1}{(p-1)^2}}_{табл} + 3\cdot\underbrace{\frac{1}{p-1}}_{табл} - \underbrace{\frac{1}{p^2}}_{табл} - 2\cdot\underbrace{\frac{1}{p}}_{табл} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow -e^{-t} - 2t\cdot e^t + 3e^t - t - 2 = 2\,sh\,t - 2e^t(t-1) - t - 2 = y(t).$$

Получаем искомое решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cdot(sh\,t - t\cdot ch\,t) + e^t, \\ y(t) = 2\,sh\,t - 2e^t(t-1) - t - 2. \end{cases}$$

5) Решение интегральных уравнений.

Интегральными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестная функция $x(t)$ стоит под знаком интеграла.

В некоторых случаях такие уравнения могут быть решены средствами операционного исчисления. К таким уравнениям относятся, например, ***уравнения Вольтерра первого и второго рода***, т.е. соответственно уравнения

$$\int_0^t k(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = f(t) \quad \text{и} \quad x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau.$$

Данные уравнения можно записать в виде:

$$k(t) * x(t) = f(t) \quad \text{и} \quad x(t) = f(t) + k(t) * x(t).$$

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p),\ k(t) \leftrightarrow K(p),\ f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Применим к уравнениям преобразование Лапласа, учитывая теорему о свертке $k(t) * x(t) \leftrightarrow K(p)X(p)$, получаем для уравнений Вольтерра

I рода: $\quad K(p)\cdot X(p) = F(p) \quad \Rightarrow \quad X(p) = \dfrac{F(p)}{K(p)};$

II рода: $\quad X(p) = F(p) + K(p)\cdot X(p) \quad \Rightarrow \quad X(p) = \dfrac{F(p)}{1-K(p)}.$

По изображению $X(p)$ находим соответствующий оригинал $x(t)$, который и является решением интегрального уравнения.

Пример 35. Найти решение интегрального уравнения

$$x(t)-\int_0^t (t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau=\sin t.$$

Решение. Пусть $x(t)\leftrightarrow X(p)$. По таблице изображений находим $t\leftrightarrow \frac{1}{p^2}$ и $\sin t\leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$. По теореме о свертке получим изображение интеграла:

$$\int_0^t (t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = t*x(t)\leftrightarrow \frac{1}{p^2}\cdot X(p).$$

Составляем операторное уравнение: $X(p)-\frac{1}{p^2}\cdot X(p)=\frac{1}{p^2+1}$.

Решая его относительно функции $X(p)$, находим

$$X(p)\cdot\frac{p^2-1}{p^2}=\frac{1}{p^2+1}\qquad\Rightarrow\qquad X(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)\cdot(p^2-1)}.$$

Для нахождения искомого оригинала $x(t)$ по изображению $X(p)$:

$$X(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)\cdot(p^2-1)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p+1};$$

$$p^2=(Ap+B)\cdot(p^2-1)+C(p^2+1)\cdot(p+1)+D(p^2+1)\cdot(p-1).$$

$$p=-1:\ 1=-4D\ \Rightarrow\ D=-\frac{1}{4};\qquad p=1:\quad 1=4C\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{4};$$

при $p^3:\ 0=A+C+D\ \Rightarrow\ A=0$; при $p^2:\ 1=B+C-D\ \Rightarrow\ B=\frac{1}{2}$.

Имеем

$$X(p)=\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}=\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{табл}+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{p^2-1}}_{табл}\leftrightarrow\frac{1}{2}(sh\,t+\sin t).$$

Т.о. решение исходного интегрального уравнения: $x(t)=\frac{1}{2}(sh\,t+\sin t)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Используя таблицу изображений и свойство линейности, найти изображения следующих оригиналов:

1.1	$f(t)=2+3\cdot t^4+e^{3t}$	1.4	$f(t)=\sin(2t)\cdot\cos(3t)+\dfrac{4}{e^{2t}}$
1.2	$f(t)=\cos^2(2t)+5\cdot sh(5t)$	1.5	$f(t)=(t+1)^2-3\cdot ch(3t)$
1.3	$f(t)=2\cdot 5^t-3\cdot t+e^{1-2t}$	1.6	$f(t)=4\cdot\cos^3(t)-5+3\cdot\sin t$

2. Используя таблицу изображений, свойство линейности и теорему смещения, найти изображения следующих оригиналов:

2.1	$f(t)=3e^{-3t}+e^t\cdot\cos(3t)$	2.4	$f(t)=\sin(2t)\cdot ch(3t)-3t+2$
2.2	$f(t)=t\cdot e^{-2t}+5e^t\cdot\sin^2(t)$	2.5	$f(t)=4\cdot e^{-2t}\cdot\sin(3t)\cdot\cos(2t)$
2.3	$f(t)=e^{2t}\cdot(ch(3t)-4sh(3t))$	2.6	$f(t)=8\cdot ch(2t)\cdot\cos(t)\cdot\cos(3t)$

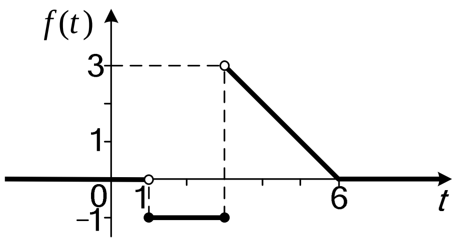
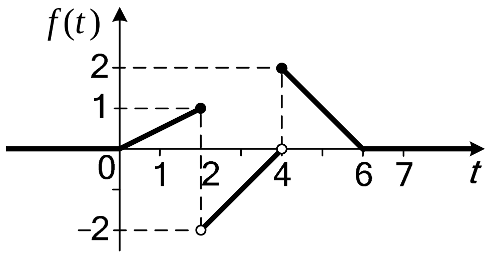
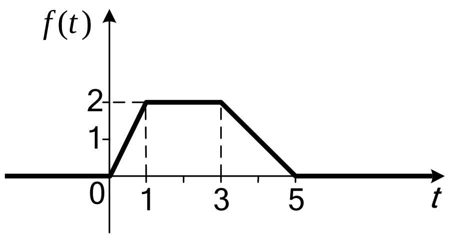
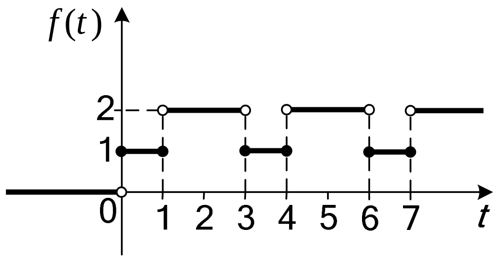
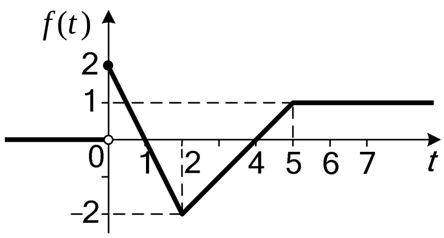
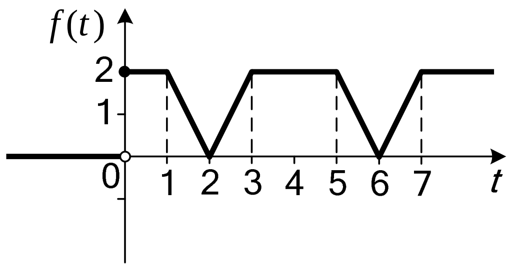
3. Используя таблицу, теоремы смещения и дифференцирования изображения, найти изображения следующих оригиналов:

3.1	$f(t)=t\cdot\cos(3t)$	3.4	$f(t)=t\cdot e^{-t}\cdot sh(2t)$
3.2	$f(t)=t^2\cdot(3-4\sin(t))$	3.5	$f(t)=t\cdot\left(e^{-2t}+t\cdot e^{t+1}\right)$
3.3	$f(t)=2t\cdot e^{2t}\cdot\sin(3t)$	3.6	$f(t)=t^3\cdot e^{2t}-3t\cdot ch^2(t)$

4. Используя таблицу изображений и теорему запаздывания, найти изображения следующих оригиналов:

4.1	$f(t)=\eta(t-1)\cdot\cos(t-1)$	4.4	$f(t)=\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\sin(3t-\pi)\cdot\eta\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)$
4.2	$f(t)=(t-3)^2\cdot\eta(t-3)$	4.5	$f(t)=t\cdot\eta(t-1)-2$
4.3	$f(t)=3e^{2t-4}\cdot\eta(t-2)$	4.6	$f(t)=(2t-1)^2\cdot\eta(t-2)$

5. Используя таблицу изображений и теорему запаздывания (1-4) или теорему о периодическом оригинале (5-6), найти изображения следующих оригиналов, заданных графически:

5.1		5.4	
5.2		5.5	
5.3		5.6	

6. Используя теорему об интегрировании изображения (1-3), теорему об интегрировании оригинала (4-6), найти изображения следующих оригиналов:

6.1	$g(t)=\dfrac{3-3e^{2t}}{t}$	6.4	$g(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot\sin(2\tau)d\tau$
6.2	$g(t)=\dfrac{1-\cos(3t)}{2t}$	6.5	$g(t)=\int\limits_0^t \cos(3\tau)\cdot e^{2\tau}\,d\tau$
6.3	$g(t)=\dfrac{10\cdot\sin(5t)}{t}$	6.6	$g(t)=\int\limits_0^t \tau\cdot e^{\tau}\cdot sh(2\tau)d\tau$

7. Найти оригинал по заданному изображению:

7.1	$F(p)=\frac{5}{p^2+36}-\frac{3p}{p^2-4}+\frac{1}{2p}$	7.4	$F(p)=\frac{p+8}{p^2+6p+13}-\frac{3}{(p-2)^3}$
7.2	$F(p)=\frac{5}{p^2+4p+3}-\frac{3}{p^7}$	7.5	$F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$
7.3	$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+1)}-\frac{2p+4}{p^2+9}$	7.6	$F(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$

8. Решить дифференциальные уравнения операционным методом:

8.1	$x'+x=e^{-t}$, $x(0)=1$	8.4	$x''+2x'-3x=e^t$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$
8.2	$x''+3x'=e^t$, $x(0)=1,\ x'(0)=-1$	8.5	$x''+2x'+x=\sin t,\ x(0)=0,\ x'(0)=-1$
8.3	$x'''+x'=t$, $x(0)=0,\ x'(0)=-1,\ x''(0)=0$	8.6	$x''+4x'+29x=145$, $x(0)=1,\ x'(0)=2$

9. Решить системы дифференциальных уравнений операционным методом:

9.1	$\begin{cases} x'=-y, \\ y'=2x+2y, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1$	9.4	$\begin{cases} 2x''+x-y'=-3\sin t, \\ x+y'=-\sin t, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0,\ x'(0)=1$
9.2	$\begin{cases} x'+x+y=\sin t, \\ x+y+y'=0, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0$	9.5	$\begin{cases} x''-y'=0, \\ x'-y''=2\cos t, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0,\ x'(0)=y'(0)=2$
9.3	$\begin{cases} x'+7x-y=5, \\ 2x+5y+y'=-37t, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0$	9.6	$\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0,\ x'(0)=0$

10. Записать свертку оригиналов $f(t)$, $g(t)$ и найти её с помощью теоремы об умножении изображений:

10.1	$f(t)=\sin t$, $g(t)=e^{t}$	10.4	$f(t)=t$, $g(t)=e^{2t}$
10.2	$f(t)=\cos t$, $g(t)=t$	10.5	$f(t)=\sin 2t$, $g(t)=\cos 3t$
10.3	$f(t)=t^{2}$, $g(t)=ch\,t$	10.6	$f(t)=sh\,2t$, $g(t)=e^{3t}$

11. Решить дифференциальные уравнения, удовлетворяющие начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$, операционным методом (с помощью интеграла Дюамеля):

11.1	$y''-2y'+y=\dfrac{e^{t}}{ch^{2}\,t}$	11.4	$y''+2y'=\dfrac{1}{ch^{2}\,t}$
11.2	$y''+y'=\dfrac{1}{\left(1+e^{t}\right)^{2}}$	11.5	$y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{1+t^{2}}$
11.3	$y''-4y=th^{2}(2t)$	11.6	$y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2t}}{(1+2t)^{2}}$

12. Решить интегральные уравнения:

12.1	$\int\limits_0^t x(\tau)\cdot e^{t-\tau}\,d\tau=\sin t$	12.4	$\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\cdot x(\tau)\,d\tau=t^{2}$
12.2	$\int\limits_0^t x(\tau)\cdot(t-\tau)^{2}\,d\tau=2x(t)-2e^{t}$	12.5	$x(t)=\int\limits_0^t x(t-\tau)\cdot e^{\tau}\,d\tau+\cos t$
12.3	$x(t)+\int\limits_0^t x(t-\tau)\cdot sh\,\tau\,d\tau=t$	12.6	$\int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t x(\tau)\cdot(t-\tau)\,d\tau+x(t)=t$

Литература

1. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М., Главная редакция физ.-мат. литературы, 1968. – стр. 416. – Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000. – 256 с.

2. Лунгу К.Н., Норин В.П., ПисьменныйД.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / под ред. С.Н. Федина.- М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

3. Старков В.Н. Операционное исчисление и его применения. Уч. пособие. – СПб, 2000. – 65 с.

4. Шахно К.У. Элементы теории функций комплексной переменной и операционного исчисления. Уч.пособие. – Л., изд. СЗПИ, 1961.

Учебное издание

Татьяна Александровна **Матвеева**
Виктория Борисовна **Светличная**
Джамиля Калимулловна **Агишева**
Светлана Александровна **Зотова**

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ: ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Редактор *Е.М. Марносова*

Темплан выпуска электронных изданий 2010 г., поз. № 22 В/117

На магнитоносителе. Уч.-изд. л. 3,48.
Подписано на «Выпуск в свет» 15.06.2010 г. Заказ №

Волгоградский государственный технический университет
400131, г. Волгоград, пр. им. В. И. Ленина, 28.