С.А. Зотова, В.Б. Светличная

ПРАКТИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

МАТЕМАТИКА

УДК 53

Рецензенты- д.ф.-м.н, проф. Горяинов В.В.
к. ф.-м.н., доц. Кульков В.Г.

Зотова С.А., Светличная В.Б. Практическое руководство по теории функций комплексного переменного. Математика. Учеб. пособие / ВолгГТУ, ВПИ, Волгоград, 1999. - 47 с.

ISBN 5-230-03704-0

Рассматриваются вопросы , касающиеся подробного анализа решения основных задач по теории функций комплексного переменного. Приводятся основные необходимые формулы . Пособие снабжено вариантами заданий для самостоятельного решения.

Рассчитано на студентов дневной и вечерней формы обучения высших технических заведений.

Ил. 28. Табл. - Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Волгоградского государственного технического университета

ISBN 5-230-03704-0

I. Комплексные числа

-А-

Комплексным числом z называется пара действительных чисел (x,y), взятых в определенном порядке на плоскости XOY.

Комплексное число z можно изобразить точкой.

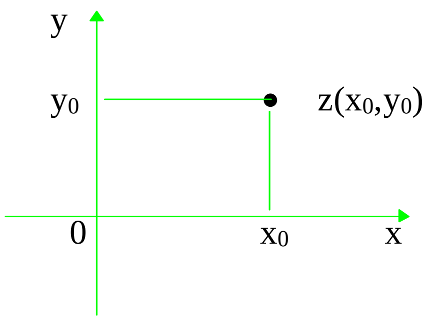

Рис. 1.1

Комплексное число z = (x;o) отождествляется с действительным числом x, то есть множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Так как любое действительно число (x;o) на плоскости будет принадлежать оси OX , то назовем ось OX действительной осью, другую ось OY- мнимой. Числа (o;y) - мнимые числа.

Для числа z = (x; y) имеем: x - действительная часть (x = Re z),
y - мнимая часть (y = Im z).
Каждая ось имеет единичные измерения:
на действительной оси OX - (1;0)=1,
на мнимой оси ОУ - (0;1)=i - мнимая единица
(которая является решением уравнения
$x^2 = -1$: $x_1 = i, x_2 = -i$, то есть $i^2 = -1$).

Алгебраическая форма записи комплексного числа z=(x,y)=x+iy.

Примеры:

$1 = 1 + 0 \cdot i = (1;0)$ – т.А ; $i = 0 + 1 \cdot i = (0;1)$ – т.В ;

$3 - 5 \cdot i = (3;-5)$ – т.С ; $2 + i = (2;1)$ – т.Д .

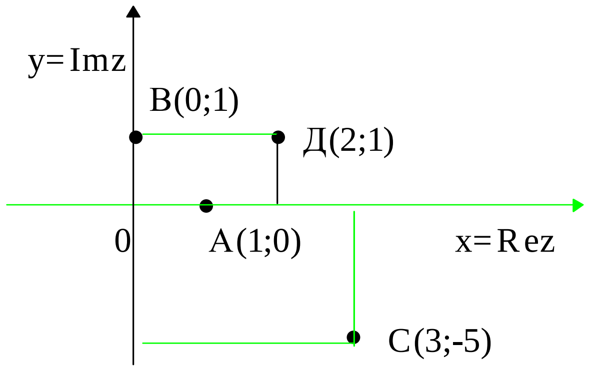

Рис. 1.2

-B-

Положение точки, изображающей комплексное число z, можно определить также с помощью полярных координат r и φ или, что тоже самое, с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величины угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси.

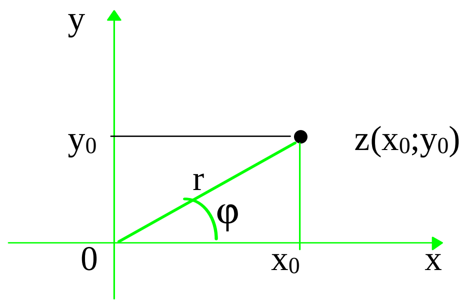

Рис. 1.3

Числа r и φ называются соответственно модулем и аргументом комплексного числа z: $r = |z|$, $\varphi = \mathrm{Arg}z$.

Из определения модуля и аргумента следует, что если $z = x + i \cdot y$, то

$$x = r \cdot \cos\varphi = |z| \cos(\mathrm{Arg}z), \quad y = r \cdot \sin\varphi = |z| \sin(\mathrm{Arg}z), \tag{1}$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{Arg}\,z) = \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Величина Argz многозначна и определена с точностью до $2\pi n\left(n = 0,\pm1,\pm2...\right)$. За главное значение Argz (обозначают argz) выбирают значение, определенное неравенствами $-\pi < \arg z \le \pi$.

Используя формулы (1), всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме:

$$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi\right).$$

С помощью формулы Эйлера $[e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi]$ *можно перейти от тригонометрической формы к показательной:* $z = r\, e^{i\varphi}$.

-С-

Два комплексных числа, имеющих одну и ту же действительную часть, а мнимые части равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, называют взаимно сопряженными.

Любое комплексное число $z = x + i \cdot y$, не принадлежащее действительной оси, имеет сопряженное $\bar{z} = x - i \cdot y$.
Точки, изображающие их на плоскости, симметричны относительно оси 0X.
То есть для $z = re^{i\varphi}$ имеем

$$\left|\bar{z}\right| = \left|z\right| = r, \quad \arg(\bar{z}) = -\arg z = -\varphi.$$

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов. При этом $i^2 = -1,\ \ i^3 = i^2 \cdot i = \left(-1\right) \cdot i = -i,\ \ i^4 = \left(i^2\right)^2 = \left(-1\right)^2 = 1,\ \ i^5 = i$ и т.д.

При записи результата действий, произведенными над комплексными числами, следует отделить действительную часть от мнимой:

$$1)\ z_1 \pm z_2 = \left(x_1 + i \cdot y_1\right) \pm \left(x_2 + i \cdot y_2\right) = \left(x_1 \pm x_2\right) + i \cdot \left(y_1 \pm y_2\right);$$

$$2)\ z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right) \cdot \left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right);$$

$$3)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{\left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right)}{\left(x_2 + iy_2\right)\left(x_2 - iy_2\right)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}.$$

4) В частности, произведение двух взаимно сопряженных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел: $z \cdot \bar{z} = (x + i\,y)(x - i\,y) = x^2 + y^2$, иначе $z\bar{z} = |z|^2$.

Если воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел $\left(z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)\right)$, то действия над ними определяются следующим образом:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$,
$[|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = r_1 \cdot r_2$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2]$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$; $\left(\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ \operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2\right)$;

3) $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ $\left(\left[z^n\right] = |z|^n, \operatorname{Arg}(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi\right)$;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$,

где $n \in N, k = 0;1;..n-1$ (число различных корней определяется степенью корня n)

-Д-

$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ - модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа.

а) Совокупность точек z, удолетворяющих уравнению $|z - z_1| = \rho$
(где z_1 - данное комплексное число, ρ - действительное положительное число)
образует окружность с центром в точке z_1, радиуса ρ.

б) Неравенство $|z - z_1| < \rho$ определяет внутренность круга,
а неравенство $|z - z_1| > \rho$ – внешность круга.

<u>Примеры:</u>

1) *Представить данные числа в тригонометрической и показательной форме:* *а) 1+i, б) i , в) -2.*

<u>Решение.</u>

а) $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \arg(1+i) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$, следовательно

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$ (рис. 1.4);

б) $|i| = \sqrt{0+1} = 1, \arg i = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \ i = 1\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$ (рис. 1.5);

в) $|-2| = 2, \arg(-2) = \pi \quad \Rightarrow \quad -2 = 2\cdot(\cos\pi + i\cdot\sin\pi) = 2e^{\pi\cdot i}$ (рис. 1.6).

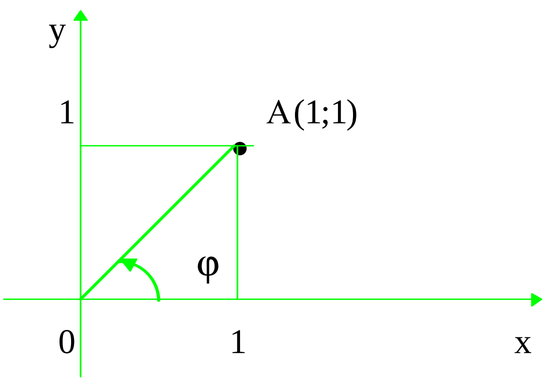

Рис. 1.4

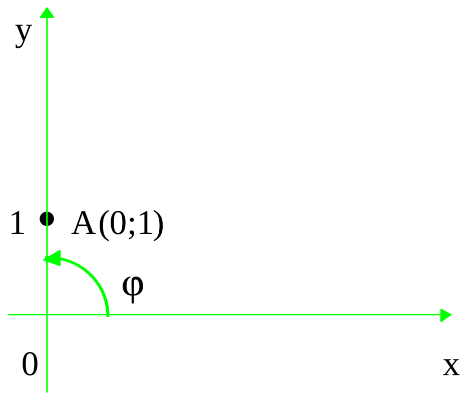

Рис. 1.5

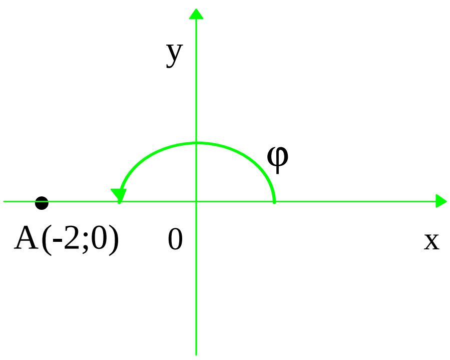

Рис. 1.6

2) *Найти:*

а) $\frac{1}{i}$, б) $\frac{1-i}{1+i}$, в) $\frac{2}{1-3\cdot i}$, г) $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$, д) $\sqrt[3]{-8}$, е) $\sqrt{1-i}$.

Решение:

а) $\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i;$

б) $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{1+1}=\frac{-2i}{2}=-i;$

в) $\frac{2}{1-3i}=\frac{2(1+3i)}{1+9}=\frac{2}{10}+\frac{6i}{10}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i;$

г) Запишем число $\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме:

$$\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2,\ \arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow$$

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

В результате получим:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2^5\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=2^5\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}\right)=-16\left(\sqrt{3}+i\right);$$

д) $-8=8(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)$, тогда $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right).$

При $k=0,1,2$ получаем

$$\sqrt[3]{-8}=\begin{cases}2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ 2(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)\\ 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{3}\right)\end{cases}=\begin{cases}1+i\sqrt{3}\\ -2\\ 1-i\sqrt{3}\end{cases}.$$

е) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$

$$\sqrt{1-i}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right).$$

При

$$k = 0{,}1\ \sqrt{1-i} = \begin{cases} \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\cdot\sin\dfrac{\pi}{8}\right); \\ \sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i\cdot\sin\dfrac{9\pi}{8}\right). \end{cases}$$

3) *Изобразить расположение точек* z*, для которых:*

а) $|z|\ f\ 5$, б) $|z-i|\ p\ 3$, в) $|z+2i| \geq 2$, г) $|z-3-4i| = 5$, д) $\operatorname{Re} z\ f\ 3$,

е) $\operatorname{Jm} z \leq 2$, ж) $|z-2| + |z+2| = 5$, з) $|z-i| = |z+2|$, и) $\arg(z-i) = \dfrac{\pi}{4}$.

<u>Решение:</u>

а) точки расположены вне круга радиуса 5 с центром в начале координат (неравенство можно записать $|z-0|\ f\ 5$) (рис. 1.8);

б) точки расположены внутри круга радиуса 3 с центром в точке $i = (0;1)$ (рис. 1.9);

в) точки расположены вне круга радиуса 2 с центром в точке $-2i = (0;-2)$ и на кружности этого круга (рис. 1.10);

г) точки расположены на окружности радиуса 5 с центром в точке $3+4i = (3;4)$ $\left(|z-(3+4i)| = 5\right)$ (рис. 1.11);

д) точки расположены справа от прямой $x = 3$ (рис. 1.12);

е) точки расположены ниже прямой $y = 2$ и на самой этой прямой (рис. 1.13);

ж) по определению: эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных фиксированных (фокусы) есть величина постоянная (равная 2a - большая ось эллипса) (рис. 1.14);
Графиком уравнения $|z-(-2)| + |z-2| = 5-$является эллипс с фокусами

в точках -2 и 2 и большой полуосью $\dfrac{5}{2}$;

з) Графически уравнение $|z - i| = |z + 2|$ можно толковать: расстояния от точки z комплексной плоскости до точек i и -2 равны. Такие точки z расположены на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему точки $z = i$ и $z = -2$ (рис. 1.15).

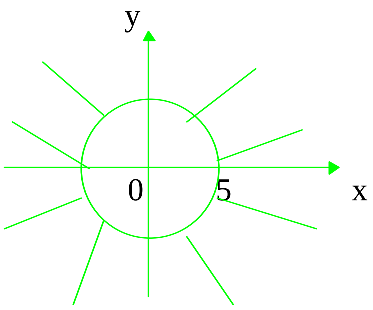

Рис. 1.8

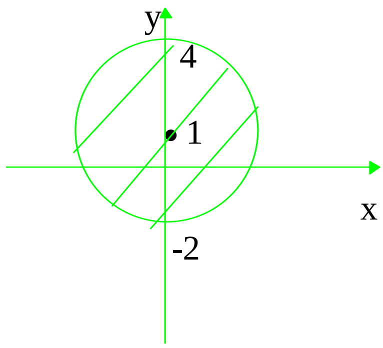

Рис. 1.9

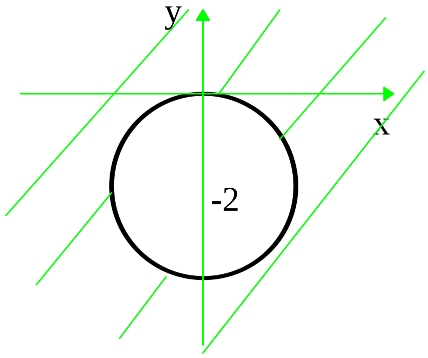

Рис. 1.10

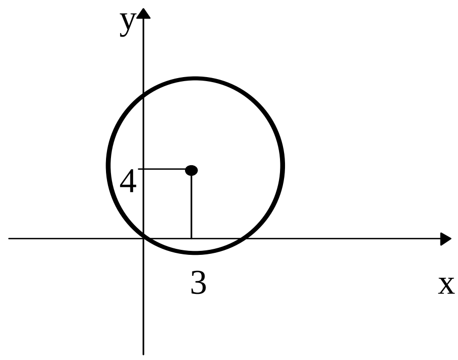

Рис. 1.11

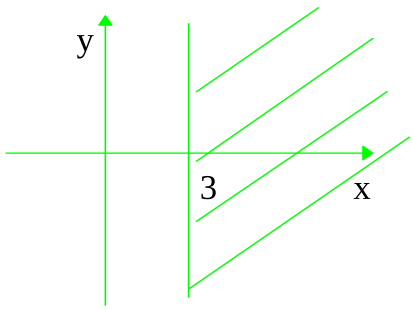

Рис. 1.12

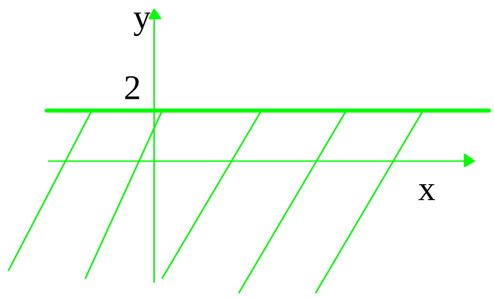

Рис. 1.13

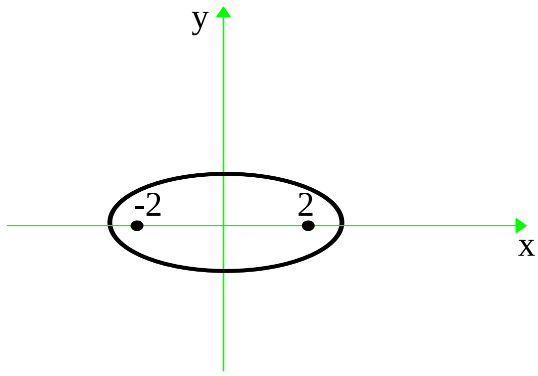

Рис. 1.14

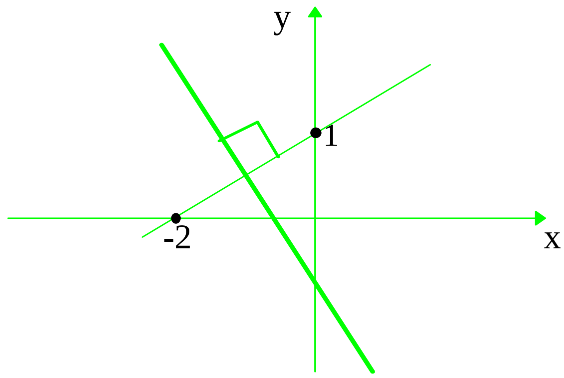

Рис. 1.15

II. Функция комплексной переменной

Если каждому комплексному числу z ,принадлежащему области Д, поставле но в соответствие некоторое комплексное число W, то говорят, что в области Д определена комплексная функция W= f (z).

Пусть z = x+iy и W = U+iV.

Тогда функция W = f (z) может быть представлена с помощью двух действительных функций U = U(x,y) и V=V(x,y).

W= f (z) = U(x,y) +i V(x,y), где U(x,y) = Re f(z), V(x,y) = Jm f(z).

Функция W = f (z) называется однолистной в области Д, если любым различным значениям $z_1 \neq z_2$, взятым из области Д, соответствуют различные значения функции $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Основные элементарные функции комплексной переменной

1.Дробно-рациональная функция: $W = \dfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{в_0 z^m + в_1 z^{m-1} + \ldots + в_m}, \quad n, m \in N.$

Частным случаем этой функции являются:

а) линейная функция $W = az + в$, где a, $в \in C, a \neq 0;$.

б) степенная функция $W = z^n, n \in N;$

в) дробно - линейная функция

$$W = \frac{az + в}{cz + d}, \quad \text{где} \quad a, в, c, d \in C, c \neq 0, ad - вc \neq 0;$$

г) функция Жуковского $\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = W.$

2. Показательная функция:

$$e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y).$$

3. Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Для этих функций сохраняются основные тригонометрические тождества.

4. Гиперболические функции:

$$shz = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right), chz = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}.$$

При этом
$\operatorname{sh}z = i\cdot\sin iz,\quad \operatorname{ch}z=\cos iz,\quad \operatorname{th}z = i\cdot \operatorname{tg}iz,\quad \operatorname{cth}z = i\cdot\operatorname{ctg}z.$

5. Логарифмическая функция:

$$\operatorname{Ln}z = \ln|z| + i\cdot(\arg z + 2\pi k).$$

Функция Ln z является многозначной. В каждой точке z (z ≠ 0,∞) она принимает бесконечно много значений.

Выражение $\ln z = \ln|z| + i\cdot\arg z$ *называется главным значением логарифмической функции* $\operatorname{Ln}z = \ln z + 2k\pi i.$

6. Общая показательная функция: $a^z = e^{z\operatorname{Ln}a}, a\in C.$

Главное значение этой многозначной функции равно $e^{z\ln z}$.

7. Общая степенная функция: $z^a = e^{a\operatorname{Ln}z}, a\in C.$

Главное значение этой функции определяется $e^{a\ln z}$.

8. Обратные тригонометрические функции: $\operatorname{Arc}\cos z = -i\cdot\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\cdot\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\operatorname{Arctg}z = -\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

9. Обратные гиперболические функции: $\operatorname{Arsh}z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$

$$\operatorname{Arch}z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arth}z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

Примеры:

1) *Выделить действительную и мнимую части следующих функций:*
а) $W = e^{1-z}$, б) $W = \sin(z-i)$.

Решение: (считаем $z = x+iy$);

а) $W = e^{1-z} = e^{1-x-iy} = e^{1-x}\cdot e^{-iy} = e^{1-x}(\cos y - i\sin y) = e^{1-x}\cos y + \left(-e^{1-x}\sin y\right)\cdot i.$

$$U(x,y)=e^{1-x}\cos y,\quad V(x,y)=-e^{1-x}\sin y;$$

б)

$$\sin(z-i)=\frac{e^{i(z-i)}-e^{-i(z-i)}}{2i}=\frac{e^{iz+1}-e^{-iz-1}}{2i}=\frac{e^{ix-y+1}-e^{-ix+y-1}}{2i}=$$

$$=\frac{e^{1-y}\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)-e^{-(1-y)}\left(\cos x-i\sin x\right)}{2\,i}=$$

$$=\sin(x)\frac{e^{1-y}+e^{-(1-y)}}{2}+i\cos(x)\frac{e^{-(1-y)}-e^{1-y}}{2}=\sin(x)\operatorname{ch}(1-y)-i\cos(x)\operatorname{sh}(1-y).$$

$$U(x,y)=\sin(x)\cdot\operatorname{ch}(1-y),\quad V(x,y)=-\cos(x)\cdot\operatorname{sh}(1-y).$$

2) *Найти* $\ln(-1)$ и $\operatorname{Ln}(-1)$.

Решение:

$|-1|=1$,, главное значение аргумента $\arg(-1)=\pi$, следовательно,

$\ln(-1)=\ln 1+\pi i=\pi i, \operatorname{Ln}(-1)=\ln 1+i\cdot(\pi+2k\pi)=\pi i\cdot(1+2k)$, где $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

3) *Найти* $\ln(3+4i)$ и $\operatorname{Ln}(3+4i)$.

Решение:

$$\left.\begin{aligned}&|3+4i|=\sqrt{9+16}=5,\\&\arg(3+4i)=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \ln(3+4i)=\ln 5+i\cdot\operatorname{arctg}\frac{4}{3},$$

$\operatorname{Ln}(3+4i)=\ln 5+i\cdot\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi i$, где $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots.)$

4) *Найти* а) i^i и б) 2^{1+i}.

Решение:

а) $i^i=e^{i\cdot\operatorname{Ln} i}=e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot i+2k\cdot\pi i\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$;

б) $2^{1+i}=e^{(1+i)(\text{in}2+2k\pi i)}=e^{i\cdot(\ln 2+2k\pi)+(\ln 2-2k\pi)}=e^{\ln 2-2k\pi}\cdot\left(\cos(\ln 2)+i\cdot\sin(\ln 2)\right)$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

5) *Найти* $\operatorname{Arc}\sin 2$.

Решение:

$$\operatorname{Arc}\sin 2 = -i \cdot \operatorname{Ln}\left(2i \pm i\sqrt{3}\right) = -i \cdot \operatorname{Ln}\left(\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i\right) = i \cdot \left(\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - i \cdot \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

6) *Найти* $\operatorname{Arctg}(2i)$.

Решение:

$$\operatorname{Arctg}(2i) = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1 + i \cdot 2i}{1 - i \cdot 2i}\right) = \frac{-i}{2}\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-i}{2}\left(\ln\frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + i\frac{\ln 3}{2} + k\pi, \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

7) *Найти значение модуля и главное значение аргумента заданных функций в точке* z_0.

а) $W = \sin z, \quad z_0 = \pi + i \cdot \ln 3,$

б) $W = z^2 e^z, \quad z_0 = -\pi i.$

Решение:

а)

$$W\left(\pi + i \cdot \ln 3\right) = \frac{e^{i\pi - \ln 3} - e^{-i\pi + \ln 3}}{2i} =$$

$$= \frac{-1}{2} i\left(e^{-\ln 3}\left(\cos\pi + i \cdot \sin\pi\right) - e^{\ln 3}\left(\cos(-\pi) + i \cdot \sin(-\pi)\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} i\left(-\left(e^{\ln 3}\right)^{-1} + e^{\ln 3}\right) = -\frac{1}{2} i \cdot \left(-\frac{1}{3} + 3\right) = -\frac{4}{3} i,$$

$|W| = \dfrac{4}{3}, \arg W = -\dfrac{\pi}{2}$ (рис . 2.16);

б)

$$W(-\pi i)=(-\pi i)^2 e^{-i}=-\pi^2\left(\cos(-\pi)+i\cdot\sin(-\pi)\right)=\pi^2;$$

$|W|=\pi^2$, $\arg W=0$, (рис . 2.17).

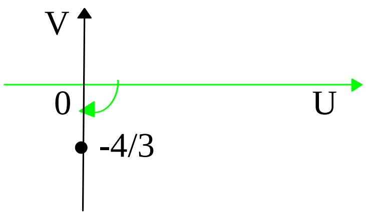

Рис. 2.16

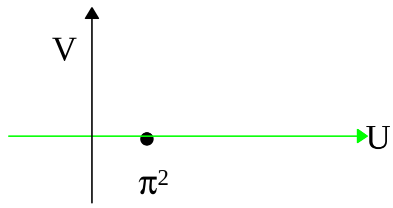

Рис. 2.17

8) *Решить уравнения*:

а) $e^z-i=0$; б) $\ln(z-i)=0.$

<u>Решение:</u>

а) $e^z-i=0\Rightarrow\ e^z=i\Rightarrow e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=i\Rightarrow$

$$\begin{cases} e^x\cos y=0\Rightarrow\cos y=0,\, y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in Z\ \ (\Rightarrow\sin y=\pm1);\\ e^x\sin y=1.\end{cases}$$

Следовательно
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=2n,\ \sin y=1,\\ e^x=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}k=2n+1,\sin y=-1,\\ e^x=-1,\end{cases}\Rightarrow\varnothing\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=0.\end{cases}$$

Получим $z=x+iy=i\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right),\quad n=0,\pm1,\pm2,\dots$

б)

$$\left.\begin{array}{l}\ln(z-i)=0,\\ \ln(z-i)=\ln|z-i|+i\cdot\arg(z-i),\\ z-i=x+i(y-1)\Rightarrow|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2},\ \ \arg(z-i)=\operatorname{arctg}\dfrac{y-1}{x}.\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Имеем $\ln\sqrt{\mathbf{x}^2+(y-1)^2}+i\operatorname{arctg}\dfrac{y-1}{x}=0;$

$$\begin{cases} \ln\sqrt{x^2+(y-1)^2}=0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y-1}{x}=0 \Rightarrow \dfrac{y-1}{x}=0, y=1, \text{ т о г д а } \ln\sqrt{x^2}=0. \end{cases}$$

Следовательно, $z=\pm 1+i$.

III. Производная. Аналитичность функции

-А-

Если в точке $z \in Д$ *существует предел* $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, *то он называется производной функции* $f(z)$ *в точке* z *и обозначается через* $f'(z)$ *или* $\dfrac{df(z)}{dz}$.

Если в точке $z \in Д$ функция $f(z)$ имеет производную $f'(z)$, то говорим, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z.

Функция $f(z)$, *дифференцируемая в каждой точке области Д и имеющая в этой области непрерывную производную* $f'(z)$, *называется аналитической в области Д.*

Если $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $z_0 \in Д$, то $f(z)$ аналитическая функция в точке $z_0 \in Д$.

Для того, чтобы функция $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ была аналитической в области Д, необходимо и достаточно существование в этой области непрерывных частных производных функций $U(x,y)$ и $V(x,y)$, удовлетворяющих условию Коши-Римана:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial V(x,y)}{\partial x} \qquad (1)$$

или в полярных координатах при $x=r\cdot\cos\varphi, y=r\cdot\sin\varphi$:

$$\frac{\partial U(r;\varphi)}{\partial\ r}=\frac{1}{r}\frac{\partial V(r;\varphi)}{\partial\ \varphi};\qquad\qquad \frac{\partial V(r;\varphi)}{\partial\ r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial U(r;\varphi)}{\partial\ \varphi}.$$

(2)

При выполнении условий (1) или (2) производная может быть записана соответственно:

$$f`(z)=\frac{\partial U}{\partial\ x}+i\frac{\partial V}{\partial\ x}=\frac{\partial V}{\partial\ y}-i\frac{\partial U}{\partial\ y}=\frac{\partial U}{\partial\ x}-i\frac{\partial U}{\partial\ y}=\frac{\partial V}{\partial\ y}+i\frac{\partial V}{\partial\ x}\qquad(3)$$

или $f`(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial U}{\partial\ r}+i\frac{\partial V}{\partial\ r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}-i\frac{\partial U}{\varphi}\right).$ (4)

Если $f(z)$ и $g(z)-$ аналитичны в некоторой области Д, то справедливы формулы:

$$(f(z)\pm g(z))'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$(f(z)\cdot g(z))'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)},g'(z)\neq 0.$$

Формулы дифференцирования функций комплексной переменной аналогичны соответствующим формулам дифференцирования функции действительной переменной.

Покажем на **примерах.**

1) *Доказать, что f(z) =* e^{2z} *аналитична и найти f′(z).*

Решение:

$$\left.\begin{aligned}&e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y),\ \text{ то есть } U(x;y)=e^{2x}\cos 2y;\\&V(x;y)=e^{2x}\sin 2y,\\&\frac{\partial U}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y,\frac{\partial V}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y,\\&\frac{\partial V}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y,\frac{\partial U}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y,\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\begin{cases}2e^{2x}\cos 2y=2e^{2x}\cos 2y,\\2e^{2x}\sin 2y=-(-2e^{2x}\sin 2y).\end{cases}$ - справедлива для любых (x;y).

Следовательно, по формуле (3)

$$\left(e^{2z}\right)' = 2e^{2x}\cos 2y + i2e^{2x}\sin 2y = 2e^{2x}\left(\cos 2y + i\sin 2y\right) = 2e^{2z},$$

то есть $\left(e^{2z}\right)' = (2z)'e^{2z} = 2e^{2z}$.

2) *Найти* $(\sin z)'$

Решение:

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} + ie^{-iz}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

-В-

Дифференцальное уравнение вида $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ *называется уравнением Лапласа. При этом решение данного уравнения - функция T(x,y) называется гармонической.*

Две гармонические функции, удолетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряженной парой и являются действительной и мнимой частями некоторой функции комплексной переменной:

$$f(z) = U(x,y) + iV(x,y).$$

($U(x,y), V(x,y)$ *- пара гармонических сопряженных функций)*

Аналитическую в области Д функцию можно задать с точностью до произвольной (комплексной) постоянной, зная ее действительную или мнимую части.

Например, если U(x,y) - действительная часть функции f(z), то

$$V(x;y) = \operatorname{Im} f(z) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} -U'_y(x;y)dx + U'_x(x;y)dy, \qquad (5)$$

где (x_0, y_0) - фиксированная точка в области Д и путь интегрирования лежит в области Д.

Если V(x,y) - мнимая часть функции f(z), то

$$U(x;y) = \operatorname{Re} f(z) = \int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} V'_y(x;y)dx - V'_x(x;y)dy. \qquad (6)$$

Пример: *проверить, что функция* $V(x,y)=2e^x\sin y, (0\le |z|\ p\ +\infty)$ *является мнимой частью некоторой аналитической функции* $f(z)$ *и найти* $f(z)$. *При этом путь интегрирования - от точки* (x_0, y_0) *до* (x,y).

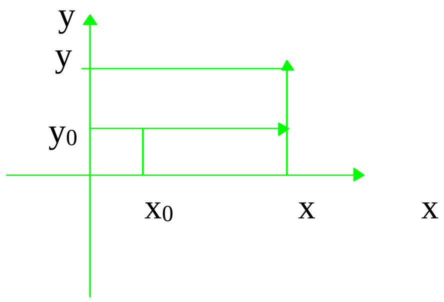

Рис. 3.18

Решение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=2e^x\sin y\ ,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-2e^x\sin y\Rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$ во всей комплексной плоскости, поэтому V(x,y) - гармоническая функция и по формуле (6) имеем:

$$U(x;y)=\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)}\left(-2e^x\cos y\right)dx-2e^x\sin ydy=\int_{x_0}^{x}2e^x\cos y_0dx-\int_{y_0}^{y}2e^x\sin ydy=$$

$$=2\cos y_0\left(e^x\Big|_{x_0}^{x}\right)-2e^x\left(-\cos y\Big|_{y_0}^{y}\right)=2\cos y_0\left(e^x-e^{x_0}\right)+2e^x\left(\cos y-\cos y_0\right)=$$

$$=2e^x\cos y-2\cos y_0e^{x_0},$$

то есть $U(x;y)=2e^x\cos y+c$ и $f(z)=2e^x\cos y+c+i\cdot 2e^x\sin y=$

$$=2e^x(\cos y+i\cdot\sin y)+c=2e^z+c.$$

Пример: *Показать, что функция вида* $U(x,y)=a\left(x^2+y^2\right)+bx+cy+a\quad a\ne 0$ *не является действительной (или мнимой) частью никакой аналитической функции.*

Решение:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2ax+в,\qquad\frac{\partial U}{\partial y}=2ay+c.$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=2a,\qquad\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=2a.$$

Следовательно $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4a,$

то есть $U(x, y)$ не является гармоничной функцией и, следователь не может быть действительной (или мнимой) частью аналитической функции.

-С-

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть $f(z)$ - аналитическая в точке z_0 функция и $f'(z_0) \neq 0$.

Тогда $|f'(z_0)|$ геометрически равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $W = f(z)$ (точнее, при $k > 1$ имеет место растяжение, а при $k<1$ - сжатие).

Аргумент производной $\varphi = \arg f'(z_0)$ геометрически равен углу , на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой L, проходящей через точку z_0 , чтобы получить касательную в точке $W_0 = f(z_0)$ к образу L этой кривой при отображении $W = f(z)$. При этом, если $\varphi > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а если $\varphi < 0$, то по ч асовой.

Таким образом, геометрический смысл модуля и аргумента производной состоит в том, что при отображении, осуществляемом функцией, удолетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$,

$k = |f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия бесконечно малого элемента в точке z_0,

$\varphi = \arg f'(z)$ - угол поворота этого элемента.

Пример: *Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ для заданных отображений W= f(z) в указанных точках:*

а) $W = z^3, z_0 = 1 + i$; б) $W = ie^{2z}, z_0 = 2\pi i$; в) $W = \sin z, z_0 = 0$.

Решение:

а) так как

$W' = \left(z^3\right)' = 3z^2$ и $W'\big|_{z=1+i} = 6i$, то $k = |6i| = 6$ и $\varphi = \arg(6i) = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $W' = 2ie^{2z}, W'\big|_{z=2i\pi} = 2ie^{4i\pi} = 2i(\cos 4\pi + i \sin 4\pi)$, то

$k = |2i| = 2, \arg(2i) = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $W' = \cos z, W'\big|_{z=0} = \cos 0 = 1$, то $k = 1, \varphi = 0$.

<u>Пример:</u> *Выяснить, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при следующих отображениях:*

а) $W=\dfrac{1}{z}$, б) $W=\ln(z+1)$, в) $W=e^{z+2}$.

<u>Решение:</u>

а) $W'=-\dfrac{1}{z^2}, k=\dfrac{1}{|z|^2}$.

Если $k=\dfrac{1}{|z|^2}<1$, то есть $|z|>1$ (точки, лежащие вне круга с центром в т. (0,0) и радиуса 1), то происходит сжатие.

При $k=\dfrac{1}{|z|^2}>1$, то есть $|z|<1$ (точки, расположенные внутри круга с центром в т. (0,0) и радиуса 1), имеем растяжение.

б) $W'=\dfrac{1}{z+1}, k=\dfrac{1}{|z+1|}$.

При $\dfrac{1}{|z+1|}<1$, то есть $|z+1|>1$ (внешность круга с центром в точке (-1,0), радиуса 1), происходит сжатие.

При $\dfrac{1}{|z+1|}>1$, то есть $|z+1|<1$ (точки расположены внутри круга с центром в точке (-1,0), радиуса 1), происходит растяжение.

в) $W'=e^{z+2}, k=\left|e^{z+2}\right|=e^{x+2}$.

$(e^{x+2}>1)\Rightarrow(x+2>0)\Rightarrow(x>-2)$.– растягивается полуплоскость $\operatorname{Re} z>-2$,

$\left(e^{x+2}<1\right)\Rightarrow(x<-2)$ – сжимается полуплоскость $\operatorname{Re} z<-2$.

-Д-

Взаимно однозначное отображение области Д плоскости (z) на область G плоскости (W) называется конформным, если в каждой точке области Д оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Критерий конформности отображения

Для того чтобы отображения области Д, задаваемое функций W= f(z), было конформным, необходимо и достаточно, чтобы f(z) была однолистной и аналитической в области Д функцией, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в Д.

Пример: *выяснить, какие из данных функций W= f(z) определяют конформные отображения, и определить области, в которых функции конформны.*

а) $W = 3z$, б) $W = z^2$, в) $W = e^z$.

Решение:

а) Так как $W' = 3 \neq 0$, то отображение конформно во всей плоскости и коэффициент растяжения в любой точке равен 3.
$\arg W' = 0$, поэтому направления при отображении не изменяются.
Если учесть, что W(0) = 0 и, следовательно, начало координат остается при рассматриваемом отображении неподвижным, то можно утверждать, что отображение с помощью функции W=3z сводится к преобразованию подобия с центром подобия в нулевой точке и коэффициентом подобия, равным 3.

б) $W' = 2z, W' = 0$ при $z = 0, W = z^2$ - однолистная всюду. Поэтому отображение $W = z^2$ конформно во всех точках плоскости z за исключением z= 0.

в) $W' = e^z \neq 0$. Однако W= e^z не является однолистной функцией во всей комплексной плоскости, поскольку показательная функция имеет период $2\pi i$.

$$\left(e^{z+2i\pi} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\left(\cos(y+2\pi) + i\cdot\sin(y+2\pi)\right) = e^x\left(\cos y + i\cdot\sin y\right) = e^z\right).$$

Чтобы $W = e^z$ была однолистной, можно рассмотреть полосу $C < Jmz < C + 2\pi$, где C- действительное число.

IV. Интеграл от функции комплексной переменной

-А-

Интеграл по кривой и его вычисление

Пусть L - дуга направленной кусочно-гладкой кривой в плоскости (z); точки $z_k \in L, (k = 0,1,\ldots,n)$ разбивают дугу L на частичные дуги, на каждой из которых выбрано по одной точке $\xi_k, k = 1,\ldots,n.$

По определению полагаем: $\int\limits_L f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$ (1)

при условии, что предел в правой части (1) существует и не зависит ни от способа разделения L на частичные дуги, ни от выбора точек ξ_k.
Если функция f(z) непрерывна на L, то интеграл (1) существует.

Если $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, *то вычисление интеграла (1) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода:*

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L U(x;y)dx - V(x;y)dx + i\cdot\int\limits_L V(x;y)dx + U(x;y)dy. \qquad (2)$$

Если дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t = t_0$ *и* $t = T$: $z_0 = x(t_0) + i\cdot y(t_0), z = x(T) + i\cdot y(T),$ то, как известно из правила вычисления криволинейного интеграла, подставив под знак интеграла вместо x и y функции x(t) и y(t), а вместо dx и dy - дифференциалы этих функций, можно свести вычисления криволинейных интегралов (2) к вычислению определенных интегралов относительно t по отрезку $[t_0; T]$.

С другой стороны, уравнения x = x(t), y = y(t) равносильны одному уравнению в комплексной форме $z = z(t)$ где $z(t) = x(t) + i\cdot y(t), dz = z'(t)dt.$

Следовательно, интеграл по комплексной переменной можно вычислить, пользуясь формулой $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{T} f(z(t))z'(t)dt.$ (3)

Примеры: *вычислить интегралы по заданным контурам:*

1) $\int\limits_L (2z+1)\bar{z}dz, \quad L = \{z \,/\, |z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le \pi\}.$

2) $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz,$ *где L - есть:*

а) Прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой (1+i).
б) Ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющая точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой (1+i).

3) $\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 \operatorname{Re} z^3 dz, \quad L = \{(x;y) / y = 3x^2, 0 \le x \le 1\}.$

Решение:

1) L- дуга окружности $|z| = 1, 0 \le \arg z \le \pi,$ которую можно задать параметрически $z(t) = e^{it}, 0 \le t \le \pi.$ Тогда $z'(t) = i \cdot e^{it}$ и, используя формулу (3), находим:

$$\int\limits_L (2z+1)\bar{z}dz = \int\limits_0^\pi \left(2e^{it}+1\right) \cdot e^{-it} \cdot i \cdot e^{it}dt = i \cdot \int\limits_0^\pi \left(2e^{it}+1\right)dt = i \cdot \left(\frac{2}{i}e^{it} + t\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= 2e^{\pi i} + i\pi - \left(2e^0 + 0\right) = 2 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi) + i\pi - 2 = -4 + i\pi.$$

2а) уравнение отрезка ОА: $y = x, 0 \le x \le 1$ (рис. 4.19),

подынтегральная функция $\operatorname{Re} z = x;$

по формуле (2): $\int\limits_L \operatorname{Re} z dz = \int\limits_L x dx + i \cdot \int\limits_L x dy.$

Перейдем в последних интегралах к определенным по переменной x: $y = x, dy = dx, 0 \le x \le 1,$

$$\int\limits_L \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 x dx + i \cdot \int\limits_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + i \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

б) уравнение отрезка OB: y= 0, отрезка AB: x = 1;

$$\int\limits_L \operatorname{Re} z dz = \int\limits_{OB} \operatorname{Re} z dz + \int\limits_{BA} \operatorname{Re} z dz = \int\limits_0^1 x dx + i \cdot \int\limits_0^1 dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 + i \cdot y\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + i.$$

3) (рис. 4.20)

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow \operatorname{Im} z^2 = 2xy,$$

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = x^3 - 3xy^2 + i \cdot \left(3x^2y - y^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} z^3 = x^3 - 3xy^2, \Rightarrow \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z^3 = 2xy\left(x^3 - 3xy^2\right) = 2x^4y - 6x^2y^3.$$

Используем формулу (2):

$$\int\limits_L \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z^3 dz = \int\limits_L \left(2x^4y - 6x^2y^3\right)dx + i \cdot \int\limits_L \left(2x^4y - 6x^2y^3\right)dy.$$

В последних интегралах перейдем к определенным интегралам, где L - часть параболы $y = 3x^2 (0 \le x \le 1)$. Следовательно, $dy = 6xdx$.

$$\int_L \operatorname{Im} z^2 \cdot \operatorname{Re} z^3 dz = \int_0^1 \left(2x^4 3x^2 - 6x^2\left(3x^2\right)^3\right)dx + i\cdot\int_0^1\left(2x^4 3x^2 - 6x^2\left(3x^2\right)^3\right)6xdx =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^6 - 162x^8\right)dx + i\cdot \int_0^1 \left(12x^7 - 972x^9\right)dx = \left(\frac{6}{7}x^7 - \frac{162}{9}x^9\right)\Big|_0^1 +$$

$$+i\cdot\left(\frac{12}{8}x^8 - \frac{972}{10}x^{10}\right) = \frac{6}{7} - 18 + i\cdot\left(\frac{3}{2} - \frac{972}{10}\right) = -\frac{120}{7} + i\cdot\left(-\frac{957}{10}\right).$$

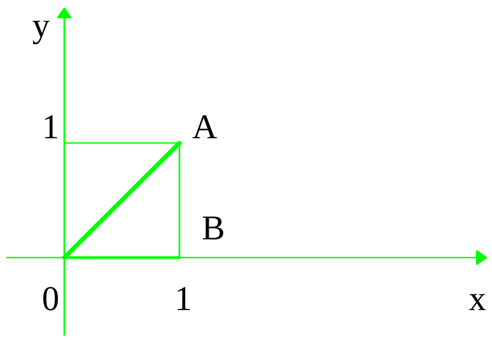

Рис. 4.19

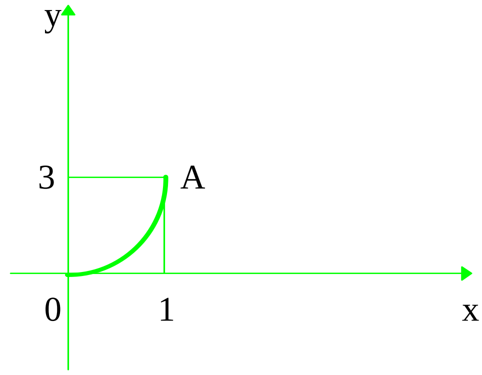

Рис. 4.20

-В-

<u>Теорема Коши. Интегральная формула Коши.</u>

<u>Теорема Коши</u>:

если функция f(z) - аналитическая в односвязной области Д, ограниченной замкнутым контуром С, а также в точках этого контура,

$$\textit{то} \int_C f(z)dz = 0. \qquad (1)$$

<u>Теорема Коши для многосвязной области</u>:

рассмотрим многосвязную область Д, ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами $C_1, C_2, .. C_n$.

Пусть f(z) является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах $C_0, C_1, C_2, .. C_n$.Тогда $\int_{c_0} f(z)dz = \int_{c_1} f(z)dz + \ldots + \int_{c_n} f(z)dz, \qquad (2)$

где $\int_{c_k} f(z)dz$ обозначает интеграл по контуру $C_к$, обходимому против часовой стрелки:

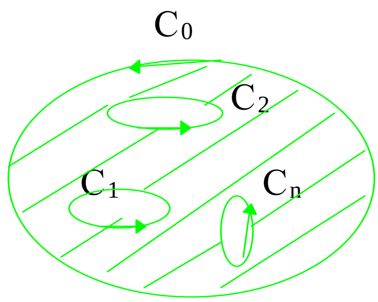

Рис. 4.21

В частности, если функция f(z) является аналитической на контурах C_0 и C_1 и в двухсвязной области, ограниченной этими контурами, то из (2) при n=1 получаем $\int\limits_{c_0} f(z)dz = \int\limits_{c_1} f(z)dz.$ (3)

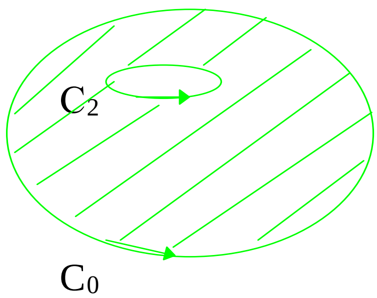

Рис. 4.22

Из теоремы Коши следует, что если функция аналитична в некоторой односвязной области, то какова бы ни была дуга C внутри этой области, величина $\int\limits_{C} f(\eta)d\eta$ зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки z дуги C и, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\eta)d\eta = \Phi(z).$$

Если функция f(z) аналитична в односвязной области Д, содержащий точки z_0 и z, причем величина z_0 постоянна, а z изменяется, то в этой области функция Φ(z) является аналитической и Φ′(z) = f(z). Функция Φ(z) называется первообразной для f(z). Причем если F(z) - одна из первообразных для f(z), то $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\eta)d\eta = F(z_2) - F(z_1).$ (4)

Эта формула совпадает с известной из интегрального исчисления формулой Ньютона-Лейбница.

Если f(z) аналитична в области Д, $z_0 \in$ Д и $\gamma \in$ Д- контур, охватывающий точку z_0,, то справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta. \qquad (5)$$

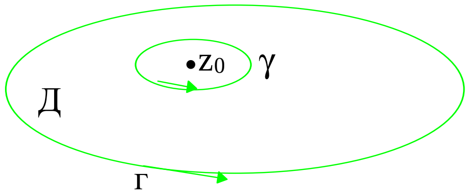

Рис. 4.23

При этом функция f(z) имеет всюду в Д производные любого порядка, для которых справедливы формула:

$$f^{(K)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{k+1}} d\eta. \quad (k = 1,2,\ldots) \qquad (6)$$

В формуле (5): $\int\limits_\gamma \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0} = \int\limits_\Gamma \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0}$, где Г - граница области Д (рис. 4.23) , что следует из теоремы Коши, для составного контура, так как единственной особой точкой в области Д для подынтегральной функции $\frac{f(\eta)}{\eta - z_0}$ является точка $\eta = z_0$ и, следовательно, в двухсвязной области между контурами Г и γ эта функция является аналитической .

Интегральная формула Коши и формула (6) могут служить для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

<u>Примеры:</u>

1) *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=2} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$ (рис. 4.24)

<u>Решение:</u>

Функция $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ внутри круга, ограниченного окружностью $|z-3i|=2$, аналитична. Запишем подинтегральную функцию в виде $\dfrac{\frac{e^z}{z}}{z-2i}$.

Применим интегральную формулу Коши, где роль η играет z, а точка z_0=2i, принадлежащая области, ограниченной окружностью $|z-3i|=2$:

$$\int\limits_{|z-3i|=2} \frac{\frac{e^z}{z}dz}{z-2i} = 2i\pi \left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i} = 2i\pi\frac{e^{2i}}{2i} = \pi e^{2i} = \pi\cdot(\cos 2 + i\cdot\sin 2).$$

2) *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$ (рис. 4.25)

<u>Решение:</u>

Применим формулу (6), где f(z)=cos z, z_0=i - точка, принадлежащая области, ограниченной окружностью $|z|$=2:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz = \frac{2i\pi}{2!}\cdot\left.\frac{d^2(\cos z)}{dz^2}\right|_{z=i} = -\pi i\cdot\cos i.$$

3) *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_C \frac{dz}{z^2+9}$, где а) C - окружность: $|z|=1$,

б) C - окружность: $|z-2i|=6$,

<u>Решение:</u>

а) Подынтегральная функция $\dfrac{1}{z^2+9}=f(z)$ является аналитической в области, ограниченной окружностью $|z|$=1 (рис. 4.26).

Следовательно, по теореме Коши $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+9}=0.$

б) Условие аналитичности функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$ нарушается в точках $z^2+9=0$, то есть в точках $z^2=-9$ $(z_1=3i, z_2=-3i)$ (рис. 4.27)

Эти точки принадлежат области, границей которой служит $|z\text{-}2i|=6$.

По теореме Коши для многосвязной области имеем:

$$\int\limits_{C}\frac{\alpha z}{z^2+9}=\int\limits_{C_1}\frac{dz}{z^2+9}+\int\limits_{C_2}\frac{dz}{z^2+9},$$

где C_1 - окружность $|z\text{-}3i|<1/2$,

C_2 - окружность $|z\text{+}3i|<1/2$.

$$\int\limits_{|z-2i|=6}\frac{dz}{z^2+9}=\int\limits_{|z-3i|<\frac{1}{2}}\frac{\frac{dz}{z+3i}}{z-3i}+\int\limits_{|z+3i|<\frac{1}{2}}\frac{\frac{dz}{z-3i}}{z+3i}=2i\pi\frac{1}{z+3i}\bigg|_{z=3i}+2i\pi\frac{1}{z-3i}\bigg|_{z=-3i}=$$

$$=2i\pi\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{6i}\right)=0.$$

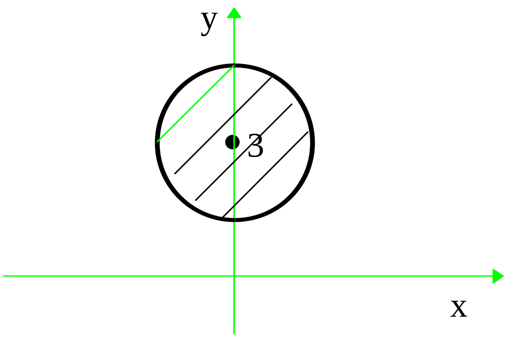

Рис. 4.24

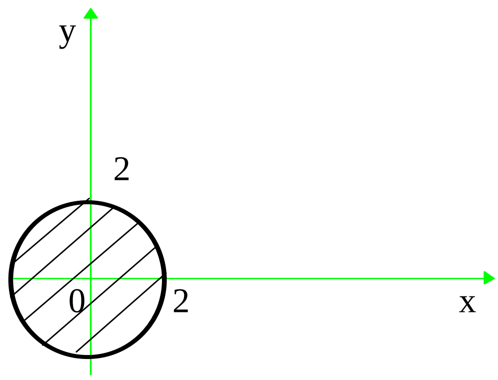

Рис. 4.25

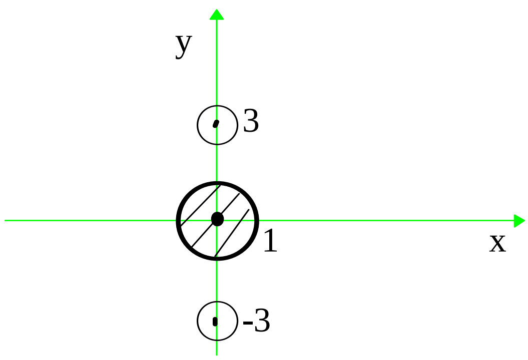

Рис. 4.26

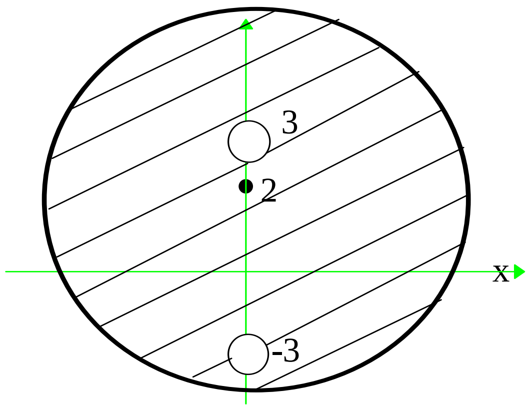

Рис. 4.27

-C-

Вычисление интегралов функции комплексной переменной с помощью вычетов

Особая точка z=a функции f(z) называется изолированной, если в некоторой окрестности этой точки функция f(z) не имеет других особых точек, то есть если в некоторой окрестности точка z = a, функция f(z) аналитична всюду, кроме самой точки z = a.

Если функция f(z) неограничена в окрестности изолированной особой точки $z = a$ и $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, то z = a является полюсом функции f(z). Будем называть точку z=a полюсом порядка n функции f(z), если эта точка является нулем порядка n для функции $\frac{1}{f(z)}$. В случае n=1 будем называть полюс простым.

Точка z = a тогда и только тогда является полюсом порядка n функции f(z), когда f(z) можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$, где φ (z) - аналитична при z = a и φ (a) ≠ 0.

Примеры:

1) *Функция* $\frac{e^z}{(z+2)^3}$ имеет полюсом 3-го порядка точку $z = -2$.

2)*Функция* $\frac{\cos z}{z^2+4} = \frac{\cos z}{(z+2i)(z-2i)}$ имеет полюсы 1-го порядка $z = 2i$ и $z = -2i$.

3) Точка z = 0 -полюс 2-го порядка *для функции* $\frac{\sin z}{z^3}$

(так как $\frac{\sin z}{z^3} = \frac{\frac{\sin z}{z}}{z^2}$ и $\frac{\sin z}{z} \neq 0$ при $z = 0$).

Если точка z=a является правильной точкой или изолированной особой точкой однозначной функции f(z), то можно выбрать простой контур C, однократно обходящий точку a в положительном направлении (например, окружность достаточно малого радиуса) так, чтобы на контуре C и всюду внутри этого контура , за исключением , быть может, самой точки a, функция f(z) была аналитичной.

Величину $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_C f(z)dz$ *будем называть вычетом функции f(z) относительно точки* a *и писать :* $\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_C f(z)dz.$ (1)

Основная теорема о вычетах

Пусть C_0 - простой замкнутый контур, на котором f(z) аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция f(z) аналитична всюду , за исключением n изолированных особых точек $a_1, a_2, \dots a_n$*. Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{c_0} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),a_k]. \quad (2)$$

Используя эту теорему, можно вычислять интегралы функции комплексной переменной по замкнутым контурам.

Приведем формулы вычисления вычетов функции относительно полюса:

а) если a- простой полюс функции f(z), то

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\lim_{z\to a}[(z-a)f(z)]. \quad (3)$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула: если функцию f(z) можно представить в виде $f(z) = f_1(z) / f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - функции, аналитичные в точке a, причем для функции $f_2(z)$ точка z=a является нулем первого порядка и $f_1(a)\neq 0$, то

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}; \quad (4)$$

б) если z = a является полюсом порядка m функции f(z), то

$$\operatorname{Res}[f(z);a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]. \quad (5)$$

Примеры: *Вычислить вычеты функций относительно указанных точек*:

1) $f(z)=\frac{z^2}{z-2}$, $z=2$, 2) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$, $z=0$,

3) $f(z)=\operatorname{ctg} z$, $z=0$, 4) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^3}$, $z=i$,

5) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$ – *относительно полюсов.*

Решение.

1) z =2 является простым полюсом функции $\dfrac{z^2}{(z-2)}$. Следовательно, в соответствии с (3) имеем $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z^2}{z-2};2\right]=\lim\limits_{z\to 2}\left[(z-2)\cdot\dfrac{z^2}{z-2}\right]=4.$

2) Точка z=0 является простым полюсом функции $\dfrac{1}{\sin z}$, так как для функции sinz эта точка является простым нулем. Следовательно $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{\sin z};0\right]=\lim\limits_{z\to 0}\left(z\cdot\dfrac{1}{\sin z}\right)=1.$

3) Имеем $\operatorname{ctg} z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$. Точка z = 0 является нулем первого порядка для функции sin z и в соответствии с формулой (4): $\operatorname{Res}[\operatorname{ctg} z;0]=\dfrac{\cos 0}{\cos 0}=1.$

4) z = i является полюсом третьего порядка данной функции, так как

$$\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3}=\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}.$$

В соответствии с (5) получим:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^2+1\right)^3};i\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+i)^{-3}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(-3\cdot(-4)\cdot(z+i)^{-5}\right)=\frac{6}{(2i)^5}=-\frac{3}{16}i.$$

5) $\dfrac{1}{z^3-z^5}=\dfrac{1}{z^3\left(1-z^2\right)}=\dfrac{1}{z^3(1-z)(1+z)}.$

Точка z = 0 является полюсом порядка 3; точки z = 1 и z =-1 - полюсами первого порядка. Для z = 0 применяем (5):

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)};0\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)}\right]=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{1-z^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(2\cdot\frac{1+4z^2}{\left(1-z^2\right)^3}\right)=1.$$

Для z = 1 и z = -1 применяем (5):

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)};1\right]=\lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{1}{z^3(1-z)(1+z)}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^3(1+z)}=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^3\left(1-z^2\right)};-1\right]=\lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{1}{z^3(1-z)(1+z)}\right)=\lim_{z\to -1}\frac{1}{z^3(1-z)}=-\frac{1}{2}.$$

Применим вычеты к вычислению интегралов функции комплексной переменной.

<u>Примеры</u>.

Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}\frac{z+1}{z^2+4}dz,$ 2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{zdz}{1-2\sin^2 z},$ 3) $\displaystyle\int\limits_{C}\frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)},$

если C- окружность $x^2+y^2=2x+2y$.

(Замечание: считаем, что при вычислении интегралов все контуры обходятся однократно в положительном направлении .)

<u>Решение:</u>

1) Внутри контура $|z|=3$ функция $f(z)=\dfrac{(z+1)}{\left(z^2+4\right)}$ имеет особые точки z = ± 2i, являющиеся полюсами первого порядка, так как $z^2+4=(z-2i)(z+2i)$.

Пользуясь формулой (4), получим

$$\operatorname{Res}\left[f(z);-2i\right] = \left.\frac{z+1}{\left(z^2+4\right)}\right|_{z=-2i} = \left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=-2i} = -\frac{1-2i}{4i},$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z);2i\right] = \left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=2i} = \frac{1+2i}{4i}$$

и, следовательно, с помощью основной теоремы о вычетах имеем $\displaystyle\int\limits_{|z|=3} \frac{(z+1)dz}{z^2+1} = 2\pi i\left(\frac{1+2i}{4i} - \frac{1-2i}{4i}\right) = 2\pi i.$

2) $|z| = 2$ - окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Так как $1-2\sin^2 z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin z\right)$, то внутри контура $|z| = 2$ подынтегральная функция имеет два простых полюса в точках $z_1 = \frac{\pi}{4}$ и $z_2 = -\frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4} \succ 2\right)$. В соответствии с теоремой о вычетах

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z};\frac{\pi}{4}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-\sin^2 z};\frac{\pi}{4}\right]\right).$$

С помощью формулы (4), учитывая, что $\left(1-2\sin^2 z\right)' = -2\cdot 2\sin z\cos z = -2\sin 2z,$ находим

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z};\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\frac{\pi}{4}}{-2\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8}; \quad \operatorname{Res}\left[\frac{z}{1-2\sin^2 z};-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{-\frac{\pi}{4}}{-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{1-2\sin^2 z} = 2\pi i\left(-\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\pi^2 i}{2}.$

3) Приведем уравнение окружности $x^2+y^2 = 2x+2y$ к каноническому виду $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$. Данное уравнение задает окружность с центром в точке (1;1), радиуса $\sqrt{2}$.

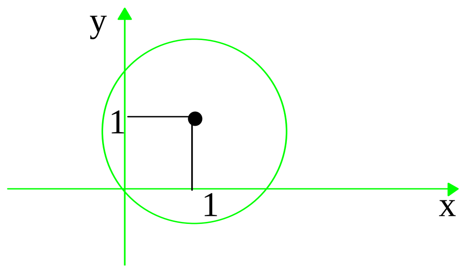

Рис. 4.28

Внутри круга подынтегральная функция $\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ имеет полюс второго порядка $z = 1$ и простой полюс $z=i$ (точка $z = -1$ не принадлежит кругу).
По теореме о вычетах:

$$\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)};1\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)};i\right]\right);$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)};1\right] = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1!}\left(\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)};i\right] = \lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{1}{(z-1)^2(z-i)(z+i)}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\pi i.$

V. Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить. Ответ записать в алгебраической форме

1. $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}+\dfrac{2+i}{3-i}-i^{61}.$

2. $\dfrac{7+6i}{3-4i}+(1-i)^3+i^{10}.$

3. $\dfrac{4-3i}{2+i}-i^{100}+(1+i)^4.$

4. $\dfrac{2i^5}{1+i^{11}}+(1+i)+\dfrac{3-i}{1+i}.$

5. $\dfrac{17i}{1+2i}+\dfrac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i\cdot\sqrt{3}}+i^{15}.$

6. $\dfrac{(i-1)^3}{i^{12}+i^{31}}+\dfrac{2+i}{1-i}.$

7. $\dfrac{(1-i)^5}{(2+2i)^3}-i^{32}-\dfrac{1+i}{2+i}.$

8. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2+i^{51}-\dfrac{i}{1-i}.$

9. $\dfrac{\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{1+i\cdot\sqrt{3}}+i^{17}-\dfrac{2-i}{1+i}.$

10. $(1-3i)(1+i)^3+i^{54}-\dfrac{i+1}{2-i}.$

12. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{33}+(1-i)^{10}+\dfrac{1}{i}.$

13. $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}+i^{17}.$

14. $\dfrac{(2+i)^3-(2-i)^3}{(2+i)^2-(2-i)^2}+i^{60}.$

15. $\dfrac{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{2i^8-1}+\dfrac{i-3}{1+i}.$

16. $\dfrac{\left(1-i^5\right)-1}{(1+i)^5+1}-i^{10}.$

17. $(1-i)^7\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{40}+i^{75}.$

18. $\dfrac{(1+i)^{30}(1-i)}{2-i}+i^{16}.$

19. $\dfrac{(1+i)^8(1-i)^2}{2+i}-i^{19}.$

20. $\dfrac{(1-i)^4(i+1)^2}{i-2}+i^{42}.$

21. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{20}+\dfrac{7-i}{2+i}-i^{31}.$

11. $\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^3+i^{99}(1+i)(1-5i).$

22. $(2-i)^2+(1+i)^4-\dfrac{7-i}{2+i}-i^{14}.$

2. Решить уравнения

1. $(3x^2+5i)ix-3y=15.$
2. $6x+y-(x^2+iy)i=2-9i.$
3. $6x+iy-2x^2+5x(i+1)=0.$
4. $x+2y(i-1)+5xy=6.$
5. $(1+i)x+(2-3i)y+x^2=0.$
6. $-9-xi+3xi(2-i)+y^2=0.$
7. $(3-2x)i-2xy-(x^2+iy)i=5.$
8. $(3-i)x+y^2-i(2x+yi)=0.$
9. $2x(i+y)-3y+x^2i=5+3i.$
10. $5x-i(2x^2+iy)=3x-8i.$
11. $(5x+iy)i-2(x+iy)=3-3i.$
12. $2xi\div y-(x+y)i=5+2i.$
13. $(6ix-1)i+5y(i-1)=3x-i.$
14. $(2+i)x-(1-i)y=1+3i.$
15. $(x+iy^2)i-5x+5i=0.$
16. $5x(i-y)+2y^2-1=2+5i.$
17. $(2x+3yi)i=(3+xi)i-i.$
18. $(2x-9i)+4yi=(10-5xi)i-6y.$
19. $(5x+2i)i+4y=(9-2xi)i+3yi.$
20. $(1+i)x+(2+i)y=(3-i)i.$
21. $5xi-2y+(x+y)i=4+5i.$
22. $(-4xi-14y)i+5y+7i(3x-y)=10x+9.$

3. Решить уравнения

1\. а) $z^4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}$, б) $\bar{z}\,|z|^2+2z=0.$

2\. а) $z^4=-128+128\cdot i\cdot\sqrt{3}$, б) $4\,|z|-2z-1-\dfrac{i}{2}=0.$

3\. а) $z^3=\dfrac{i}{27}$, б) $z\,|z|-z+i=0.$

4\. а) $z^3=27$, б) $4|z|-8z-1-2i=0.$

5\. а) $z^3=-27i$, б) $z\,|z|+z+i=0.$

6\. а) $z^4=\dfrac{1}{256}$, б) $2z\,|z|-4z+1+i=0.$

7. а) $z^4 = -128 - 128 \cdot i \cdot \sqrt{3}$, б) $z\,|z| + 3z + i = 0$.

8. а) $z^4 = -\dfrac{1}{16}$, б) $z^2 + |z|^2 = 0$.

9. а) $z^4 = -256i$, б) $\bar{z} = -4z^2 + 12$.

10. а) $z^4 = 256$, б) $\bar{z} = 2 - |\bar{z}|$.

11. а) $z^4 = -8 - 8 \cdot i \cdot \sqrt{3}$, б) $3\bar{z} + |\bar{z}|^2 \cdot 3i = 0$.

12. а) $z^4 = 3 - 3i$, б) $|z|^2 + z|z| = 0$.

13. а) $z^4 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, б) $4\bar{z} - z^2 = 0$.

14. а) $z^4 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, б) $z\,|z| + 3\bar{z} = 0$.

15. а) $z^4 = -8 + 8 \cdot i \cdot \sqrt{3}$, б) $z\,|z| - 5z + i = 0$.

16. а) $z^4 = \dfrac{1}{16}$, б) $z^2 = \bar{z} + 1$.

17. а) $z^3 = -8$, б) $z^2 + \left(1 + \bar{z}\right)2 = 0$.

18. а) $z^3 = 8i$, б) $3\,|z| - z^2 = 0$.

19. а) $z^4 = -\dfrac{1}{16}$, б) $3z + z^2 + z = 0$.

20. а) $z^4 = \dfrac{i}{8}$, б) $|z|^2 + 2iz - 4 + 2i = 0$.

21. а) $z^4 = 8 - 8 \cdot i \cdot \sqrt{3}$, б) $\bar{z} + [z[- 4 = 0$.

22. а) $z^4 = \dfrac{1 - i \cdot \sqrt{3}}{32}$, б) $2z^2 + \bar{z} - 1 = 0.$

4. Изобразить область, ограниченную линиями.
Для пункта (а) написать уравнение (неравенство) полученной области

1. а) $|z + i| = |z - i|$, б) $\begin{cases} |z + i| \ f \ 1, \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \ p \ 0. \end{cases}$

2. а) $-\operatorname{Re} z + |z| \le 0$, б) $\begin{cases} |z - 1 - i| \ p \ 1, \\ |\arg z| \le \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

3. а) $|1 + z| = |z + i|$, б) $\begin{cases} 1 \ p \ |z - 1| \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0, \\ \operatorname{Re} z \ p \ 1. \end{cases}$

4. а) $|z| \ f \ |z + 1|$, б) $\begin{cases} 1 \le |z - i| \ p \ 2, \\ \operatorname{Re} z \le 0, \\ \operatorname{Im} z \ f \ 1. \end{cases}$

5. а) $|z + 2i| = |z|$, б) $\begin{cases} |z| \ p \ 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 1, \\ 0 \le \arg z \ p \ \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

6. а) $|z - 3| = |z + i|$, б) $\begin{cases} |z| \ f \ 1, \\ -1 \ p \ \operatorname{Im} z \le 1, \\ 0 \ p \ \operatorname{Re} z \le 2. \end{cases}$

7. а) $|z+4| < |z-i|$, б) $\begin{cases} |z-1| > 1, \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3. \end{cases}$

8. а) $|z|^2 - \operatorname{Re}\left(z^2\right) \le 9$, б) $\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\dfrac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

9. а) $|z|^2 - \operatorname{Im}\left(z^2\right) \le 4$, б) $\begin{cases} z \cdot \bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 1, \\ \operatorname{Im} z > -1. \end{cases}$

10. а) $|z+i| = |z+4|$, б) $\begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 2, \\ \operatorname{Re} z > 0, \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1. \end{cases}$

11. а) $|z-4| < |z+i|$, б) $\begin{cases} |z-2-i| \ge 1, \\ 1 \le \operatorname{Re} z < 3, \\ 0 < \operatorname{Im} z \le 3. \end{cases}$

12. а) $|z-i| \le |z+1|$, б) $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 1, \\ |\operatorname{Im} z| < 2. \end{cases}$

13. а) $|z| - \operatorname{Im} z \le 0$, б) $\begin{cases} |z-1-i| \ge 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z \le 2. \end{cases}$

14. а) $|1-z| = |z+1|$, б) $\begin{cases} |z+i| < 2, \\ 0 < \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$

15. а) $|z+2| \; f \; |z|$, б) $\begin{cases} |z-i| \le 2, \\ 0 \; p \; \operatorname{Im} z \; p \; 2. \end{cases}$

16. а) $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 10$, б) $\begin{cases} |z-i| \le 1, \\ 0 \; p \; \arg z \; p \; \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

17. а) $|z+2| \; f \; |z-1|$, б) $\begin{cases} |z-1+i| \ge 1, \\ \operatorname{Re} z \; p \; 1, \\ \operatorname{Im} z \le -1. \end{cases}$

18. а) $|z-1+3i| \; p \; |z|$, б) $\begin{cases} |z+1| \ge 1, \\ |z+i| \; p \; 1. \end{cases}$

19. а) $|z+zi| = |z-1|$, б) $\begin{cases} |z-1| \le 1, \\ |z+1| \; f \; 2. \end{cases}$

20. а) $|z-2| \le |z+1|$, б) $\begin{cases} |z-i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \; f \; 1. \end{cases}$

21. а) $|z-1|^2 - |z-2i|^2 \; p \; 2$, б) $\begin{cases} |z-1-i| \le 1, \\ \operatorname{Im} z \; f \; 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 1. \end{cases}$

22. а) $|z-1|^2 + |z+1|^2$, б) $\begin{cases} |z-2-i| \le 2, \\ \operatorname{Re} z \ge 3, \\ \operatorname{Im} z \; p \; 1. \end{cases}$

5. Выделить действительную и мнимую части

1. а) $\operatorname{sh}\left(3+\dfrac{\pi i}{6}\right)$, б) $\operatorname{Ln} 6$.

2\. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(-1 - i)$.

3\. а) $\mathrm{ch}\left(2 + \frac{\pi}{4} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(2 - 2i)$.

4\. а) $\cos(\pi - 2i)$, б) $\mathrm{Ln}\,(3i)$.

5\. а) $\mathrm{sh}\left(2 - \frac{\pi}{3} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(-10i)$.

6\. а) $\mathrm{sh}\left(1 + \frac{5\pi}{6} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(3)$.

7а) $\mathrm{ch}\left(1 - \frac{\pi}{6} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(4)$.

8\. а) $\mathrm{sh}\left(2 - \frac{3\pi}{4} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,\left(2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{3}\right)$.

9\. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

10\. а) $\cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,\left(4 - 4 \cdot i \cdot \sqrt{3}\right)$.

11\. а) $\cos(-\pi + 3i)$, б) $\mathrm{Ln}\,(1 + i)$.

12\. а) $\sin(i - \pi)$, б) $\mathrm{Ln}\,\left(-2 + 2 \cdot i \cdot \sqrt{3}\right)$.

13\. а) $\sin(2\pi + 4i)$, б) $\mathrm{Ln}\,(6i)$.

14\. а) $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\left(3 + i \cdot \sqrt{3}\right)$.

15\. а) $\mathrm{ch}\left(1 - \frac{5\pi}{6} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(-3 + 6i)$.

16\. а) $\mathrm{ch}\left(2 + \frac{3\pi}{4} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(3 - 9i)$.

17\. а) $\mathrm{sh}\left(1 - \frac{7\pi}{4} i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(5 + 5i)$.

18. а) $\mathrm{sh}\left(1+\frac{11\pi}{4}i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(3-i)$.

19. а) $\mathrm{ch}\left(2-\frac{\pi}{2}i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(2+i)$.

20. а) $\mathrm{ch}\left(1+\frac{17\pi}{3}i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(3i-6)$.

21. а) $\cos\left(\frac{14\pi}{3}+2i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,\left(i+\sqrt{3}\right)$.

22. а) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}+i\right)$, б) $\mathrm{Ln}\,(-1+i)$.

6. Восстановить аналитическую функцию, если известна ее часть

1. $U(x;y)=x^2-y^2-2y.$
2. $V(x;y)=e^x\cos y.$
3. $U(x;y)=e^{-y}\cos x.$
4. $U(x;y)=y-2xy.$
5. $V(x;y)=x^2-y^2+2x+1.$
6. $U(x;y)=3x^2y-y^3-y.$
7. $V(x;y)=2xy+y.$
8. $V(x;y)=e^{-y}\sin x.$
9. $U(x;y)=x^3-3xy^2+1.$
10. $U(x;y)=\frac{x}{x+y}.$
11. $V(x;y)=3x+2xy.$
12. $U(x;y)=3x^2y+yx-y.^3$
13. $V(x;y)=x^2y-\frac{1}{3}y^3+x.$
14. $U(x;y)=e^x\sin y+x.$
15. $V(x;y)=2e^{-x}\sin y+xy.$
16. $V(x;y)=x^3+x-3xy^2.$
17. $V(x;y)=\frac{y}{x+y}+x.$
18. $U(x;y)=x-2xy+y.$
19. $V(x;y)=4x^2+2xy-4y^2.$
20. $U(x;y)=3xy^2-x^3+2x.$
21. $V(x;y)=e^{-x}\sin y+yx.$
22. $V(x;y)=x^2-xy-y^2+x.$

7. Найти интеграл по кривой AB

1. $\int\limits_{AB} z\left(|z|^2 + \operatorname{Im} z\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 0, z_в = 3 - i.$

2. $\int\limits_{AB} z\left(\operatorname{Im} z + \bar{z}\right)dz,$ AB: $y = x^2,\ z_a = i - 1, z_в = 0.$

3. $\int\limits_{AB} \frac{1}{\operatorname{Re} z}\left(z^2 + \bar{z} - \operatorname{Im} z\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 2 - i, z_в = 1 + i.$

4. $\int\limits_{AB} \left(\operatorname{Im} z + (\operatorname{Re} z)^2 + z^2\right)dz,$ AB: $y = \frac{1}{x},\ z_a = 1 + i, z_в = 3 + \frac{1}{3}i.$

5. $\int\limits_{AB} \frac{z^2 + z}{\operatorname{Im} z}dz,$ AB: отрезок, $z_a = 1 - i, z_в = 0.$

6. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im} z\left(z^2 + \bar{z}\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = -1, z_в = 0.$

7. $\int\limits_{AB} \frac{z\,dz}{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z},$ AB: отрезок, $z_a = 0, z_в = 1 + 2i.$

8. $\int\limits_{AB} \frac{\operatorname{Im} z + z}{\operatorname{Re} z}dz,$ AB: отрезок, $z_a = 5 - i, z_в = 0.$

9. $\int\limits_{AB} \left(5z - i(\operatorname{Re} z)^2\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 2 - i, z_в = i.$

10. $\int\limits_{AB} z\left(\operatorname{Im}\left(z^2\right)\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 1 - i, z_в = 1 + i.$

11. $\int\limits_{AB} \left(\operatorname{Im} \bar{z} \operatorname{Re} z + z\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 1 - i, z_в = i.$

12. $\int\limits_{AB} \left(2z + |z|^2\right)dz,$ AB: $y = x^2,\ z_a = 1 + i, z_в = 0.$

13. $\int\limits_{AB} \left((\operatorname{Im} z)^2 - z^2 + z\right)dz,$ AB: $y = x^2,\ z_a = -1 + i, z_в = 0.$

14. $\int\limits_{AB} \left(\bar{z}^2 \operatorname{Im} z - 2z\right)dz,$ AB: $y = \frac{1}{x},\ z_a = 1 + i, z_в = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)i.$

15. $\int\limits_{AB} (z + 1)e^z dz,$ AB: дуга окружности , $\begin{cases} |z| = 1, \\ \operatorname{Re} z \ge 0. \end{cases}$

16. $\int\limits_{AB} z \operatorname{Im} z\left(z^2\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 0, z_в = 1 + i.$

17. $\int\limits_{AB} z \operatorname{Re}\left(z^2\right)dz,$ AB: отрезок, $z_a = 0, z_в = 1 + 2i.$

18. $\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\,\mathrm{Im}\, z dz,$ AB: отрезок, $z_a = 1+i, z_в = 0.$

19. $\int\limits_{AB} \left(\bar{z}\,\mathrm{Re}\, z + z^2\right) dz,$ AB: $y = x^2$, $z_a = -1+i, z_в = 0.$

20. $\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Re}\left(z^3\right) dz,$ AB: отрезок, $z_a = 1+i, z_в = i-1.$

21. $\int\limits_{AB} \left(\mathrm{Im}\left(\bar{z}\right)\right)\cdot\left(z^2 - 1\right) dz,$ AB: $y = \frac{1}{x}$, $z_a = 1+i, z_в = 2+\left(\frac{1}{2}\right)i.$

8. Найти все вычеты подынтегральной функции и вычислить интеграл по замкнутому контуру.

1.а) $\int\limits_{|z-6|=2} \frac{5dz}{(z-5)^3(z-3)}$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{3z-1}{4z^3}dz$, в) $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{\left(z^2+1\right)dz}{(z-1-i)^2(z-3-i)}$.

2.а) $\int\limits_{|z+6|=2} \frac{(z+1)dz}{(z+5)^3 z}$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz$, в) $\int\limits_{|z+i|=3} \frac{zdz}{(z-2+i)^2(z+i-4)}$.

3.а) $\int\limits_{|z+6|=2} \frac{z-1}{(z+5)^3(z+3)}dz$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{z^4}dz$, в) $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{3dz}{(z-2+i)^2(z+i-4)}$.

4.а) $\int\limits_{|z-3|=2} \frac{z^2 вz}{(z-4)^3(z+1)}dz$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{3-2z+4z^4}{z^3}dz$, в) $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{\pi dz}{(z+2-i)^2(z+4-i)}$.

5.а) $\int\limits_{|z+2|=2} \frac{2zdz}{(z+1)^3(z-1)}$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz$, в) $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{(1+z)dz}{(z+1-2i)^2(z+3-2i)}$.

6.а) $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{(z+1)dz}{(z+2)^3 z}$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}dz$, в) $\int\limits_{|z-2i|=3} \frac{z^2dz}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}$.

7.а) $\int\limits_{|z+3|=2} \frac{(4z+1)dz}{(z+2)^3 z}$, б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1-2z^4+3z^5}{z^4}dz$, в) $\int\limits_{|z-6i|=2} \frac{dz}{(z+1-6i)^2(z+3-6i)}$.

8. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-4|=2}\frac{3zdz}{(z-5)^3(z+1)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^5-3z^3+5z+1}{z^4}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z+5i|=2}\frac{z^2dz}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}$.

9. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+4|=2}\frac{2zdz}{(z+3)^3(z+1)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2}\frac{e^zdz}{(z-1-i)^2(z-3-i)}$.

10. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2}\frac{(z^2+1)dz}{(z-4)^3z}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-7i|=2}\frac{(z^2-z)dz}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}$.

11. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+5|=2}\frac{z^2dz}{(z+4)^3(z+2)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3}\frac{(z-1)dz}{(z+2-i)^2(z+4-i)}$.

12. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+4|=2}\frac{(z+1)dz}{(z+3)^3(z-2)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=2}\frac{(2z+1)dz}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}$.

13. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=2}\frac{2zdz}{(z-2)^3(z-4)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{3-2z+4z^4}{z^5}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-3i|=2}\frac{5dz}{(z+1-3i)^2(z+3-3i)}$.

14. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+5|=2}\frac{(2z-1)dz}{(z+4)^3z}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z-3z^2+1}{z^4}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z+i|=2}\frac{(z^2-1)dz}{(z-1+i)^2(z-3+i)}$.

15. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=2}\frac{(2z+1)dz}{(z-3)^3(z-5)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{(1+z)dz}{z^5}$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2}\frac{\sin zdz}{(z+1-2i)^2(z+3-2i)}$.

16. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2}\frac{z^2dz}{(z-2)^3(z+1)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^3-z^2+1}{z^4}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z+7i|=2}\frac{(8z-1)dz}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}$.

17. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=2}\frac{(z^2+2)dz}{(z-4)^3(z-6)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{2+3z^2-5z^4}{2z^4}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=2}\frac{zdz}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}$.

18. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+3|=3} \frac{(2-z^2)dz}{(z+1)^3(z-1)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+\cos z}{z^3}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z+3i|=2} \frac{dz}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}$.

19. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-4|=2} \frac{2dz}{(z-5)^3(z-7)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{(z+1)dz}{(z+1-i)^2(z+3-i)}$.

20. а) $\displaystyle\int\limits_{|z+6|=3} \frac{dz}{(z+5)^3(z-4)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-5i|=2} \frac{e^z dz}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}$.

21. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-5|=2} \frac{2zdz}{(z-6)^3(z-8)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3} \frac{\cos zdz}{(z+2-i)^2(z+4-i)}$.

22. а) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=3} \frac{zdz}{(z-3)^3(z+3)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z-\sin z+1}{z^4}dz$, в) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z-1-i)^2(z-3-i)}$.

СПИСОК
ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. -М:”Наука”,1976.
2. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения.-М:”Высшая школа”,1988.
3. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплесного переменног. Операционное исчисление. Теория устойчивости. -М:”Наука”,1981.
4. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные разделы математического анализа. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П., -М:”Наука”,1981.
5. Ефимов А.В. Математический анализ (специальные разделы). Ч1. -М:Высшая школа, 1980.

СОДЕРЖАНИЕ