МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

Н. Н. Короткова, Д. А. Мустафина, И. В. Ребро, С. Ю. Кузьмин

Методические указания для выполнения семестровой работы по теме «Дифференциальные уравнения»

Методические указания

Волжский
2012

УДК 519.2

Р е ц е н з е н т
канд. тех. наук, доцент *В.Б. Светличная*

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Короткова, Н. Н. **Методические указания по выполнению семестровой работы по теме «Дифференциальные уравнения» [**Электронный ресурс**]**: методические указания / Н. Н. Короткова, Д. А. Мустафина, И. В. Ребро, С. Ю. Кузьмин // Сборник «Методические указания». Выпуск 2. – Электрон. текстовые дан. (1файл: 235 Kb) – Волжский: ВПИ (филиал) ВолгГТУ, 2012. – Систем. требования: Windows 95 и выше; ПК с процессором 486+; CD-ROM. – номер гос. регистрации 0321200818.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей дневной и очно-заочной (вечерней) форм обучения высших технических учебных заведений. Содержат решения семестровой работы варианта 27 по теме «Дифференциальные уравнения».

Илл.1, Библиография: 2 названия

Вариант 27	*Часть А*
1. ***Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными:*** а) $xy'=1+y^2$, b) $3y'tg(3x)=y$. **2.** ***Найти общее решение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка:*** $(x-y)ydx-x^2dy=0$. **3.** ***Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:*** $y'+\frac{3y}{x}=x$. **4.** ***Найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах:*** $\frac{y}{x}dx+(\ln(x)+3y^2)dy=0$.	**5.** ***Найти частное решение дифференциального уравнения, допускающее понижение порядка:*** $y''=20x^3-\frac{2}{x^3}$. **6.** ***Найти решение задачи Коши:*** $xy''=1+y'$, $y(0{,}5)=0{,}5, y'(0{,}5)=1$. **7.** ***Найти общее решение однородного дифференциального уравнения 3-го порядка:*** $y'''-81y'=0$. **8.** ***Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка:*** $y''+4y'+4y=2\cos(2x)-3\sin(2x)$. **9.** ***Решить систему дифференциальных уравнений:*** $\begin{cases} x'=5x+4y \\ y'=2x+3y \end{cases}$.

Часть В

Решить уравнения:		
1. $(3x-2y-1)y'-(x-y)=0$	**5.** $7xdy=7ydx+\sqrt{x^2+y^2}dx$	
2. $y'-y\cdot tg(x)+y^2\cos(x)=0$	**6.** $\sqrt{4+y^2}\cdot dx-y\cdot dy=x^2y\cdot dy$	
3. $y''-3y'-18y=xe^{6x}$, $y(0)=6, y'(0)=0$	**7.** $y''-18y'+36y=5e^{6x}$	
4. $y''+2y'+y=\frac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$	**8.** $\begin{cases} x'=2x-4y+4e^{-2t} \\ y'=2x-2y \end{cases}$	**9.** $xy'''+2y'=0$

Часть С

1. ***Найти линию, проходящую через точку*** $M_0(1{,}5)$ ***и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор MN с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy равную -2.***	
2. Решить уравнения: а) $xy^2(xy'+y)=1$ в) $y'''-64y'=-64e^{8x}+128\cos(8x)$ с) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$, если $y(0)=1+2\ln 2, y'(0)=3\ln 2$	**3.** ***Решить систему, записанную в векторной форме:*** $x'=Ax$, **где** x **– вектор, А – данная матрица,** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Вариант 27
Решение части А

1.*Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными*:

а) $xy' = 1 + y^2$, b) $3y' tg(3x) = y$.

Решение:

а) Для решения уравнения разделим переменные и проинтегрируем обе части

$x\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$; $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$; $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x}$.

$arctg(y) = \ln(x) + C$ -общий интеграл (общее решение).

б) Для решения уравнения разделим переменные и проинтегрируем обе части

$3\frac{dy}{dx}\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = y$; $\frac{dy}{y} = \frac{\cos(3x)dx}{3\sin(3x)}$; $\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{9}\int \frac{\cos(3x)d(3x)}{\sin(3x)}$;

$\ln(y) = \frac{1}{9}\ln(\sin(3x)) + C$; $y = (\sin(3x))^{\frac{1}{9}} \cdot C_1$-общее решение.

2.*Найти общее решение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка:*

$$(x - y)ydx - x^2dy = 0.$$

Однородное уравнение решаем заменой $y = ux$, $dy = udx + xdu$

$(x - ux)uxdx - x^2(udx + xdu) = 0$; $-u^2x^2dx - x^3du = 0$

Разделим переменные и проинтегрируем обе части

$\frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}$; $-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$; $\frac{1}{u} = \ln(x) + C$. Вернемся к *x* и *y*.

$\frac{x}{y} = \ln(x) + C$ -общий интеграл.

3.*Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка*: $y' + \frac{3y}{x} = x$.

1 способ. В этом линейном уравнении $P(x) = -\frac{3}{x}$, $Q(x) = x$.

Решение ищем в виде произведения $y = uv$.

Решаем два уравнения:

1) $v' = Pv$; $\frac{dv}{dx} = -\frac{3}{x}v$; $\frac{dv}{v} = -\frac{3}{x}dx$; $\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x}$; $\ln(v) = -3\ln(x)$; $v = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$.

2) $u'v = Q$; $\frac{du}{dx}\frac{1}{x^3} = x$; $du = x^4dx$; $\int du = \int x^4dx$; $u = \frac{x^5}{5} + C$

Найдём *y*.

$y=\left(\frac{x^5}{5}+C\right)\frac{1}{x^3}$ -общее решение.

2 способ. Данное дифференциальное уравнение можно решить через замену

$y=u\cdot v$, где $y'=u'\cdot v+v'\cdot u$. $y'+\frac{3y}{x}=x$

$u'\cdot v+v'\cdot u+\frac{3uv}{x}=x$

$u'v+u\left(v'+\frac{3v}{x}\right)=x$. Найдем функцию *v*, для этого выражение в скобках приравняем к нулю.

$v'+\frac{3v}{x}=0$, где $v'=\frac{dv}{dx}$.

Получено уравнение с разделяющимися переменными, решаем его.

$\frac{dv}{dx}=-\frac{3v}{x}$

$\frac{dv}{v}=-\frac{3dx}{x}$; $\int\frac{dv}{v}=-3\int\frac{dx}{x}$; $\ln v=-3\ln x+\ln C$. Используем свойства логарифмов $\ln v=\ln\frac{C}{x^3}$, потенцируем $v=\frac{C}{x^3}$. Найдем какое-нибудь одно решение, для этого возьмем $C=1$, получим $v=\frac{1}{x^3}$.

Зная *v*, найдем *u* из выражения $u'\cdot v=x$, где $u'=\frac{du}{dx}$.

$\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x^3}=x$. “Разделим” переменные, $du=x^4dx$, проинтегрируем полученное выражение $\int du=\int x^4dx$. $u=\frac{x^5}{5}+C$.

Так как $y=u\cdot v$, следовательно $y=\left(\frac{x^5}{5}+C\right)\cdot\frac{1}{x^3}$.

3 способ. Решаем линейное однородное уравнение $y'+\frac{3y}{x}=0$.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3y}{x}$; $\frac{dy}{y}=-\frac{3dx}{x}$; $\ln(y)=-3\ln(x)+\ln C_1$; $y=\frac{C_1}{x^3}$.

Находим решение неоднородного уравнения, считая C_1 функцией от *x*.

$y=\frac{C_1(x)}{x^3}$; $y'=\frac{C_1'(x)}{x^3}-3\frac{C_1}{x^4}$ Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$\frac{C_1'(x)}{x^3} - 3\frac{C_1(x)}{x^4} + 3\frac{C_1(x)}{x^4} = x$. Получаем $C_1'(x) = x^4$, $C_1(x) = \frac{x^5}{5} + C$.

Находим $y = \left(\frac{x^5}{5} + C\right)\frac{1}{x^3}$ - общее решение.

4.*Найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах:* $\frac{y}{x}dx + (\ln(x) + 3y^2)dy = 0$.

В этом уравнении $P(x,y) = \frac{y}{x}$, $Q(x,y) = \ln(x) + 3y^2$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x}$ равно $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x}$, то это уравнение в полных дифференциалах.

Нам нужно найти такую функцию $U(x,y)$, что $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$.

Из первого уравнения находим $U(x,y) = \int P dx = \int \frac{y}{x} dx = y\ln(x) + C(y)$. Из второго уравнения найдём $C(y)$.

$\frac{\partial U}{\partial y} = \ln(x) + C'(y) = \ln(x) + 3y^2$; $C'(y) = 3y^2$

Находим $C(y) = y^3 + C_1$ и $U(x,y) = y\ln(x) + y^3 + C_1$.

$y\ln(x) + y^3 = C_1$-общий интеграл.

5.*Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка:*

$y'' = 20x^3 - \frac{2}{x^3}$.

Для решения уравнения проинтегрируем его два раза

$y' = \int y'' dy = \int\left(20x^3 - \frac{2}{x^3}\right)dx = 5x^4 + \frac{1}{x^2} + C_1$

$y = \int y' dy = \int\left(5x^4 + \frac{1}{x^2} + C_1\right)dx = x^5 - \frac{1}{x} + C_1 x + C_2$ -общее решение

6.*Найти решение задачи Коши:*

$$xy'' = 1 + y',\ y(0{,}5) = 0{,}5,\ y'(0{,}5) = 1.$$

Для решения уравнения сделаем замену $z = y'$, $z' = y''$ и решим полученное уравнение с разделяющимися переменными $xz' = 1 + z$

$x\frac{dz}{dx} = 1 + z$; $\frac{dz}{z+1} = \frac{dx}{x}$; $\int\frac{dz}{z+1} = \int\frac{dx}{x}$; $\ln(z+1) = \ln(x) + C$; $z + 1 = x \cdot C_1$;

$y' = x \cdot C_1 - 1$

$y=\int y'dx=\int (x\cdot C_1-1)dx=C_1\dfrac{x^2}{2}-x+C_2$ -общее решение.

Поставив начальные значения, получим систему уравнений

$y'(0{,}5)=1 \quad 1=0{,}5\cdot C_1-1 \quad C_1=4$

$y(0{,}5)=0{,}5 \quad 0{,}5=4\dfrac{(0{,}5)^2}{2}-0{,}5+C_2 \quad C_2=0{,}5$

$y=4\dfrac{x^2}{2}-x+0{,}5$-частное решение

7.*Найти общее решение однородного дифференциального уравнения 3-го порядка:*

$$y'''-81y'=0.$$

Для решения уравнения составим характеристическое уравнение $k^3-81k=0$.
Его корни $k_1=0, k_2=9, k_3=-9$.

Общее решение данного однородного уравнения $y=C_1+C_2e^{9x}+C_3e^{-9x}$

8.*Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка*:

$$y''+4y'+4y=\cos 5x-2\sin 5x.$$

Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка со специальной правой частью $f(x)=\cos 5x-2\sin 5x$ ($a=1,\ b=-2$).

1)Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

Оно имеет вид $y''+4y'+4=0$. Составим характеристическое уравнение $k^2+4k+4=0$ и найдем его корни: $k_1=k_2=-2$.

Тогда общее решение ЛОДУ имеет вид $y_{oo}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

2) Найдем частное решение ЛНДУ.

Т. к. $f(x)=\cos 5x-2\sin 5x$, $a=1$, $b=-2, n=5$ и число $\pm ni=\pm 5i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=\mathrm{A}\cos 5x+\mathrm{B}\sin 5x$. Для отыскания неопределенных коэффициентов А и В подставим $y_{чн}$ в данное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, предварительно найдя $\tilde{y}'=-5\mathrm{A}\sin 5x+5\mathrm{B}\cos 5x$,

$y''_{чн} = -25\text{A}\cos 5x - 25\text{B}\sin 5x$. Получаем равенство $-25\text{A}\cos 5x - 25\text{B}\sin 5x - 20\text{A}\sin 5x + 20\text{B}\cos 5x + 4\text{A}\cos 5x + 4\text{B}\sin 5x =$
$= \cos 5x - 2\sin 5x$ или $(-21\text{A} + 20\text{B})\cos 5x + (-21\text{B} - 20\text{A})\sin 5x = \cos 5x - 2\sin 5x$,

Запишем систему для нахождения А и В и решим ее:

$$\begin{cases} -21\text{A} + 20\text{B} = 1, \\ -20\text{A} - 21\text{B} = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{A} = \frac{19}{841}, \\ \text{B} = \frac{62}{841}. \end{cases}$$

Тогда $y_{чн} = \frac{19}{841}\cos 5x + \frac{62}{841}\sin 5x$.

3) Найдём общее решение неоднородного уравнения.

Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{19}{841}\cos 5x + \frac{62}{841}\sin 5x$.

9.*Решить систему дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}.$$

Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 4y'$.
Подставим в полученное уравнение выражение для y' из системы:
$x'' = 5x' + 4(2x + 3y)$.
Выразим y из первого уравнения $y = \dfrac{x' - 5x}{4}$ и подставим в полученное выражение: $x'' = 5x' + 8x + 3(x' - 5x)$.
Получили линейное однородное уравнение второго порядка: $x'' - 2x' + 7x = 0$.
Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 7 = 0$ и найдем его корни:
$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}i$.
Решение этого линейного однородного уравнения
$x = C_1 e^x \cos(\sqrt{6}x) + C_2 e^x \sin(\sqrt{6}x)$.
Найдём

$$y=\frac{x'-5x}{4}=\frac{C_1e^x\cos(\sqrt{6}x)+C_2e^x\sin(\sqrt{6}x)-\sqrt{6}C_1e^x\sin(\sqrt{6}x)+\sqrt{6}C_2e^x\cos(\sqrt{6}x)}{4}-$$

$$-\frac{5C_1e^x\cos(\sqrt{6}x)+5C_2e^x\sin(\sqrt{6}x)}{4}=\frac{(\sqrt{6}C_2-4C_1)\cos(\sqrt{6}x)-(\sqrt{6}C_1+4C_2)\sin(\sqrt{6}x)}{4}$$

Решение системы: $\begin{cases} x=C_1e^x\cos(\sqrt{6}x)+C_2e^x\sin(\sqrt{6}x) \\ y=\dfrac{(\sqrt{6}C_2-4C_1)\cos(\sqrt{6}x)-(\sqrt{6}C_1+4C_2)\sin(\sqrt{6}x)}{4} \end{cases}$

Решение части В

Решить уравнения:

1. $(3x-2y-1)y'-(x-y)=0$

Это уравнение, приводящееся к однородному.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$. Решаем систему $\begin{cases} x_0-y_0=0 \\ 3x_0-2y_0-1=0 \end{cases}$ $x_0=y_0=1$.

Делаем замену $\begin{cases} x=u+x_0 \\ y=v+y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=u+1 \\ y=v+1 \end{cases}$. Получаем уравнение

$$(3u-2v)\frac{dv}{du}-(u-v)=0. \quad \frac{dv}{du}=\frac{u-v}{3u-2v}=\frac{1-v/u}{3-2\,v/u}.$$

Однородное уравнение решаем заменой $v=ut$, $dv=udt+tdu$.

$$u\frac{dt}{du}+t=\frac{1-t}{3-2t};\ u\frac{dt}{du}=\frac{1-4t+2t^2}{3-2t};\ \frac{(3-2t)dt}{2t^2-4t+1}=\frac{du}{u};\ \frac{1}{2}\int\frac{(3-2t)dt}{(t^2-2t+0{,}5)}=\int\frac{du}{u}$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части

$$\frac{1}{2}\int\frac{(3-2t)dt}{(t-1)^2-0{,}5}=\begin{vmatrix} m=t-1 \\ dm=dt \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{(1-2m)dm}{m^2-0{,}5}=\frac{1}{2}\int\frac{dm}{m^2-0{,}5}-\int\frac{mdm}{m^2-0{,}5}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{0{,}5}}\ln\left|\frac{m-\sqrt{0{,}5}}{m+\sqrt{0{,}5}}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|m^2-0{,}5\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}m-1}{\sqrt{2}m+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|m^2-0{,}5\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(t-1)-1}{\sqrt{2}(t-1)+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+0{,}5\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(\frac{v}{u}-1\right)-1}{\sqrt{2}\left(\frac{v}{u}-1\right)+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}\right)^2-2\frac{v}{u}+0{,}5\right|+C.$$

Получаем равенство

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(\frac{v}{u}-1\right)-1}{\sqrt{2}\left(\frac{v}{u}-1\right)+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}\right)^2-2\frac{v}{u}+0,5\right|+C=\ln|u|$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)-1}{\sqrt{2}\left(\frac{y-1}{x-1}-1\right)+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2-2\frac{y-1}{x-1}+0,5\right|+C=\ln|x-1|$$ -общий интеграл

2. $y'-y\cdot tg(x)+y^2\cos(x)=0$

Это уравнение Бернулли $P(x)=tg(x)$, $Q(x)=-\cos(x)$, n=2

Решение ищем в виде произведения $y=uv$.

Решаем два уравнения:

1) $v'=Pv$; $\frac{dv}{dx}=tg(x)v$; $\frac{dv}{v}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$; $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{\sin(x)dx}{\cos(x)}$; $\ln(v)=-\ln(\cos(x))$

$v=\frac{1}{\cos(x)}$.

2) $u'v=Q(uv)^n$

$\frac{du}{dx}\frac{1}{\cos(x)}=-\cos(x)\left(u\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right)^2$; $\frac{du}{u^2}=-dx$; $\int\frac{du}{u^2}=-\int dx$; $-\frac{1}{u}=-x+C$; $u=\frac{1}{x+C}$

Найдём y.

$y=\frac{1}{\cos(x)(x+C)}$ -общее решение

3. $y''-3y'-18y=xe^{6x}$, $y(0)=6, y'(0)=0$

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

Оно имеет вид $y''-3y'-18=0$. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни $k^2-3k-18=0$

$D=81,\ k_1=6,\quad k_2=-3.$

Решение линейного однородного уравнения $y_{oo}=C_1e^{6x}+C_2e^{-3x}$

2) Найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-3y'-18y=x\cdot e^{6x}$

Правая часть $\left.\begin{array}{l} f(x)=x\cdot e^{6x}=P(x)\cdot e^{6x},\ \ P(x)=x \quad\Rightarrow\ Q=Ax+B \\ \text{один корень } k_1=6 \quad\Rightarrow\ r=1\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad y_{чн}=Q\cdot e^{6x}\cdot x^r=(Ax+B)\cdot e^{6x}\cdot x^1=\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{6x}$

И так: $y_{чн}=\left(Ax^2+Bx\right)\cdot e^{6x}$

$$y'_{чн} = \left(2Ax + B + 6Ax^2 + 6Bx\right)\cdot e^{6x}$$
$$y''_{чн} = \left(2A + 12Ax + 6B + 12Ax + 6B + 36Ax^2 + 36Bx\right)\cdot e^{6x}$$
$$= \left(2A + 24Ax + 12B + 36Ax^2 + 36Bx\right)\cdot e^{6x}$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(2A + 24Ax + 12B + 36Ax^2 + 36Bx\right)\cdot e^{6x} - 3\cdot\left(2Ax + B + 6Ax^2 + 6Bx\right)\cdot e^{6x} - 18\left(Ax^2 + Bx\right)\cdot e^{6x} = x\cdot e^{6x}$$
$$\left(2A + 24Ax + 12B + 36Ax^2 + 36Bx\right) - 3\cdot\left(2Ax + B + 6Ax^2 + 6Bx\right) - 18\cdot\left(Ax^2 + Bx\right) = x$$
$$(2A + 9B) - 18Ax = x$$

По методу неопределённых коэффициентов имеем:

$$\begin{cases} 2A + 9B = 0, \\ -18A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/18, \\ B = 1/81 \end{cases} \Rightarrow y_{чн} = \left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{81}x\right)\cdot e^{6x}$$

3)Найдём общее решение неоднородного уравнения. Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-3x} + \left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{81}x\right)\cdot e^{6x}$$

Подставляя начальные условия, получим

$$\begin{cases} y(0) = 6 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ 6C_1 - 3C_2 + \dfrac{1}{81} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1457}{729} \\ C_2 = \dfrac{2917}{729} \end{cases}.$$

Окончательно получаем $y = \frac{1457}{729}e^{6x} + \frac{2917}{729}e^{-3x} + \left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{81}x\right)\cdot e^{6x}$

4. $y'' + 2y' + y = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x}$

Это линейное неоднородное уравнение решим методом Лагранжа. Для этого решим соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Его решение $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. То есть $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$.

Частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.

Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$найдём из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0 \\ -C_1' e^{-x} + C_2'(1-x)e^{-x} = \dfrac{3\sqrt{x+1}}{e^x} \end{cases}.$$

Отсюда $C_2' = 3\sqrt{x+1}$, $C_1' = -3x\sqrt{x+1}$.

Проинтегрировав полученные равенства, получим $C_2 = 2(x+1)^{\frac{3}{2}}$,

$$C_1 = -2x(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} = (x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right).$$

$$y_{чн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right)e^{-x} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}}xe^{-x}$$

Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{5} - \frac{6}{5}x\right)e^{-x} + 2(x+1)^{\frac{3}{2}}xe^{-x}$$

5. $7xdy = 7ydx + \sqrt{x^2 + y^2}dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{7x} = \frac{y}{x} + \frac{1}{7}\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$. Это однородное уравнение.

Делаем замену $u = \frac{y}{x},\ y' = u + x\frac{du}{dx}$. Получим уравнение с разделяющимися переменными: $u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{7}\sqrt{1+u^2}$.

“Разделив переменные”, получим $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{7x}$.

Проинтегрировав обе части $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{7x}$, получим

$$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \frac{1}{7}\ln|x| + C.$$

$u + \sqrt{1+u^2} = C_1 x^{\frac{1}{7}}$.

$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = C_1 x^{\frac{1}{7}}$ -общее решение дифференциального уравнения.

6. $\sqrt{4 + y^2} \cdot dx - y \cdot dy = x^2 y \cdot dy$

$\sqrt{4 + y^2} \cdot dx = (x^2 + 1)y \cdot dy$

Это уравнение с разделяющимися переменными. “Разделив переменные”, получим

$\frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}$. Проинтегрировав обе части и сделав замену, получим

$arctg(x) = \sqrt{y^2 + 1} + C$ -общее решение уравнения.

7. $y'' - 18y' + 36y = 5e^{6x}$

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

Оно имеет вид $y''-18y'+36y=0$. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни $k^2-18k+36=0$

$D=180$, $k_1=9+\sqrt{45}$, $k_2=9-\sqrt{45}$.

Решение линейного однородного уравнения $y_{oo}=C_1\,e^{(9+\sqrt{45})x}+C_2\,e^{(9-\sqrt{45})x}$

2) Найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''-18y'+36y=5e^{6x}$

Правая часть $\left.\begin{matrix} f(x)=5\cdot e^{6x}=P(x)\cdot e^{6x}, \quad P(x)=5 \quad \Rightarrow\ Q=A \\ \textit{ноль корней равно}\ m=6 \quad \Rightarrow\ r=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y_{чн}=Q\cdot e^{6x}\cdot x^r=A\cdot e^{6x}\cdot x^0=Ae^{6x}$

И так: $y_{чн}=A\cdot e^{6x}$, $y'_{чн}=6A\cdot e^{6x}$, $y''_{чн}=36A\cdot e^{6x}$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$36A\cdot e^{6x}-18\cdot(6A)\cdot e^{6x}+36Ae^{6x}=5\cdot e^{6x}$; $36A=5$; $A=\dfrac{5}{36}\Rightarrow \quad y_{чн}=\dfrac{5}{36}\cdot e^{6x}$.

3)Найдём общее решение неоднородного уравнения. Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он}=y_{oo}+y_{чн}$, то окончательно получаем

$$y_{он}=y_{oo}+y_{чн}=C_1\,e^{(9+\sqrt{45})x}+C_2\,e^{(9-\sqrt{45})x}+\frac{5}{36}\cdot e^{6x}.$$

8. $\begin{cases} x'=2x-4y+4e^{-2t} \\ y'=2x-2y \end{cases}$

Дифференцируем первое уравнение по t $x''=2x'-4y'-8e^{-2t}$. Подставляем в него выражение из второго уравнения $y'=2x-2y$, получаем

$x''=2x'-8x+8y-8e^{-2t}$. Подставим выражение для у из первого уравнения

$y=-\dfrac{x'}{4}+\dfrac{x}{2}+e^{-2t}$, получаем линейное уравнение второго порядка $x''+4x=0$.

Характеристическое уравнение $k^2+4=0$, его корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Общее решение уравнения $x=C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)$. Найдём

$y=-\dfrac{x'}{4}+\dfrac{x}{2}+e^{-2t}=\dfrac{(C_1+C_2)}{2}\sin(2t)+\dfrac{(C_1-C_2)}{2}\cos(2t)+e^{-2t}$.

9. $xy'''+2y'=0$ Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами. Изучите эту тему самостоятельно и решите уравнение.

Решение части С

1. Найти линию, проходящую через точку $M_0(1{,}5)$ и обладающую тем свойством, что в любой ее точке М касательный вектор MN с концом на оси Оу имеет проекцию на ось Оу ,равную -2.

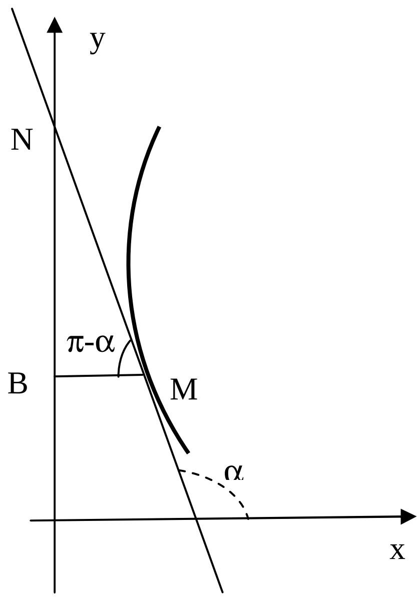

Рис.1

Рассмотрев треугольник BMN, получим $tg\angle M = tg(\pi-\alpha) = \dfrac{BN}{BM}$.

$tg(\pi-\alpha) = -tg(\alpha) = -y'$, $BN = 2$, $BM = x$.

Отсюда следует, что линия задаётся дифференциальным уравнением $-y' = \dfrac{2}{x}$. Решим его, разделив переменные $y = -2\ln(x) + C$.

Подставим начальные условия $5 = -2\ln(1) + C$ и найдём частное решение $y = -2\ln(x) + 5$

***2. Решить уравнения*:**

а) $xy^2(xy' + y) = 1$

Это уравнение Бернулли $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2y^2}$, $P(x) = -\dfrac{1}{x}$, $Q(x) = \dfrac{1}{x^2}$, *n*=-2.

Решение ищем в виде произведения $y = uv$.

Решаем два уравнения:

$$1)\, v' = Pv;\ \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v;\ \frac{dv}{v} = -\frac{1}{x}dx;\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x};\ \ln(v) = -\ln(x);\ v = \frac{1}{x}.$$

$$2)\, u'v = Q(uv)^n;\ \frac{du}{dx}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{u}{x}\right)^{-2} = \frac{1}{u^2};\ u^2du = xdx;\ \int u^2du = \int xdx;\ \frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C_1}.$$

Найдём *y*.

$$y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C_1} = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C_1}{x^3}}$$ -общее решение.

в) $y''' - 64y' = -64e^{8x} + 128\cos(8x)$

1) Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

Оно имеет вид $y''' - 64y' = 0$. Составим характеристическое уравнение и найдём его корни $k^2 - 64k = 0$

$k_1 = 0, \quad k_2 = 8, \quad k_3 = -8$.

Решение линейного однородного уравнения $y_{oo} = C_1 + C_2 e^{8x} + C_3 e^{-8x}$.

2) Найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''' - 64y' = -64e^{8x}$

Правая часть $\left.\begin{array}{l} f(x) = -64 \cdot e^{8x} = P(x) \cdot e^{8x}, \quad P(x) = -64 \quad \Rightarrow \; Q = A \\ \text{один корень равен } \; m = 8 \quad \Rightarrow \; r = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y_{чн1} = Q \cdot e^{8x} \cdot x^r = A \cdot e^{8x} \cdot x^1 = Axe^{6x}$

И так: $y_{чн1} = Ax \cdot e^{8x}$

$y'_{чн1} = A \cdot e^{8ч} + 8Axe^{8ч}$

$y''_{чн1} = 16A \cdot e^{8x} + 64Axe^{8x}$

$y'''_{чн1} = 80A \cdot e^{8x} + 512Axe^{8x}$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$80A \cdot e^{8x} + 512Axe^{8x} - 64(Ae^{8x} + 8Axe^{8x}) = -64 \cdot e^{8x}$; $16A = -64$; $A = -4$

$\Rightarrow \quad y_{чн1} = -4x \cdot e^{8x}$

3) Найдем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y''' - 64y' = 128\cos(8x)$.

Так как $f(x) = 128\cos(8x)$, $a = 128$, $b = 0$, $n = 8$ и число $\pm ni = \pm 8i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $y_{чн2} = \mathrm{A}\cos 5x + \mathrm{B}\sin 5x$. Для отыскания неопределенных коэффициентов А и В подставим $y_{чн}$ в данное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, предварительно найдя $y'_{чн2} = -8\mathrm{A}\sin 8x + 8\mathrm{B}\cos 8x$, $y''_{чн2} = -64\mathrm{A}\cos 8x - 64B\sin 8x$.

$y'''_{чн2} = 512\mathrm{A}\sin 8x - 512B\cos 8x$. Получаем равенство

$512\mathrm{A}\sin 8x - 512B\cos 8x - 64(-8\mathrm{A}\sin 8x + 8\mathrm{B}\cos 8x) = 128\cos 8x$

$1024A\sin 8x - 1024B\cos 8x = 128\cos 8x$ или,

Запишем систему для нахождения А и В и решим ее:

$$\begin{cases} 1024A = 0, \\ -1024\mathrm{B} = 128. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 0, \\ \mathrm{B} = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Тогда $y_{чн2} = -\frac{1}{8}\sin 8x$.

Частное решение исходного линейного неоднородного уравнения есть сумма полученных частных решений $y_{чн} = -4x \cdot e^{8x} - \frac{1}{8}\sin 8x$

4) Найдём общее решение неоднородного уравнения. Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2\, e^{8x} + C_3\, e^{-8x} - 4x \cdot e^{8x} - \frac{1}{8}\sin 8x .$$

c) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$, если $y(0) = 1 + 2\ln 2, y'(0) = 3\ln 2$

Это линейное неоднородное уравнение решим методом Лагранжа.
Для этого решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Его решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. То есть $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$
Частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде
$y_{чн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$.
Функции $C_1(x)$, $C_2(x)$найдём из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x + 2C_2' e^{2x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}.$$

Отсюда $C_2' = \dfrac{1}{e^x(1+e^x)}$, $C_1' = -\dfrac{1}{1+e^x}$.

Проинтегрировав полученные равенства, получим $C_2 = -e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right|$,
$C_1 = \ln\left|e^x + 1\right| - x$.

$$y_{чн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) = \left(\ln\left|e^x + 1\right| - x\right)e^x + \left(-e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right|\right)e^{2x}$$

Так как общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находится в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, то окончательно получаем

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1\, e^x + C_2 e^{2x} + \left(\ln\left|e^x + 1\right| - x\right)e^x + \left(-e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right|\right)e^{2x}.$$

Подставив начальные условия, получим $1 + 2\ln 2 = C_1 + C_2 + 2\ln 2 - 1$, $C_1 + C_2 = 2$.

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - \frac{e^x}{e^x + 1} + \left(\ln\left|e^x + 1\right| - x\right)e^x + \frac{e^{2x}}{e^x(1+e^x)} + \left(-e^{-x} + \ln\left|e^x + 1\right| - x\right)2e^{2x}$$

$$3\ln 2 = C_1 + 2C_2 - \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} + (-1 + \ln 2)2$$

$C_1 + 2C_2 = 2$. Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = 2$.

Частное решение $y = 2\,e^x + \left(\ln\left|e^x + 1\right| - x\right)e^x + \left(-e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right|\right)e^{2x}$

3. ***Решить систему, записанную в векторной форме:*** $x' = Ax$**, где** x **– вектор,** А **– данная матрица,**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение многочлен $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ и решим его. Получим собственные числа $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Общее решение данной системы будем искать в виде

$$\begin{cases} x = C_1\alpha_1 e^{2t} + C_2\alpha_2 e^t + C_3\alpha_3 te^t \\ y = C_1\beta_1 e^{2t} + C_2\beta_2 e^t + C_3\beta_3 te^t \\ z = C_1\gamma_1 e^{2t} + C_2\gamma_2 e^t + C_3\gamma_3 te^t \end{cases}.$$

Решения, соответствующие простому собственному числу $\lambda_1=2$, ищем в виде:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 e^{2t} \\ y = \beta_1 e^{2t} \\ z = \gamma_1 e^{2t} \end{cases}.$$

Подставляя эти уравнения в исходную систему и сокращая на e^{2t}, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ 2\beta_1 = -2\alpha_1 - \gamma_1 \\ 2\gamma_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 \end{cases}.$$

Решив её методом Гаусса, находим: $\beta_1 = -2\alpha_1, \gamma_1 = 2\alpha_1$.

Решения, соответствующие собственным числам $\lambda_2=\lambda_3=1$. ищем в виде:

$$\begin{cases} x = \alpha_2 e^t + \alpha_3 te^t \\ y = \beta_2 e^t + \beta_3 te^t \\ z = \gamma_2 e^t + \gamma_3 te^t \end{cases}.$$

Подставляя эти уравнения в исходную систему и сокращая на e^t, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_2+\alpha_3=2\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \\ \beta_2+\beta_3=-2\alpha_2-\gamma_2 \\ \gamma_2+\gamma_3=2\alpha_2+\beta_2+2\gamma_2 \\ \alpha_3=2\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \\ \beta_3=-2\alpha_3-\gamma_3 \\ \gamma_3=2\alpha_3+\beta_3+2\gamma_3 \end{cases}$$

Решив её методом Гаусса, находим:

$$\begin{cases} \alpha_3=0 \\ \beta_3+\gamma_3=0 \\ \alpha_2+\beta_3=0 \\ \gamma_2=\beta_3-\beta_2 \end{cases}.$$

Следовательно, множество решений, соответствующих $\lambda_2=\lambda_3=1$, задаётся формулой

$$\begin{cases} x=-\beta_3e^t \\ y=\beta_2e^t+\beta_3te^t \\ z=(\beta_3-\beta_2)e^t-\beta_3te^t \end{cases}.$$

Суммируя полученные решения, находим общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x=C_1e^{2t}-C_2e^t \\ y=-2C_1e^{2t}+C_3e^t+C_2te^t \\ z=2C_1e^{2t}+(C_2-C_3)e^t-C_2te^t \end{cases}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003.
2. Ребро И.В., Мустафина Д.А., Кузьмин С.Ю., Короткова Н.Н. «Дифференциальные уравнения». – Волгоград, РПК «Политехник», 2006.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Неля Николаевна **Короткова**
Джамиля Алиевна **Мустафина**
Ирина Викторовна **Ребро**
Сергей Юрьевич **Кузьмин**

Методические указания для выполнения семестровой работы по теме «Дифференциальные уравнения»

Методические указания

План электронных изданий 2012 г. Поз. № 123В
Подписано на «Выпуск в свет» 28.04.12. Уч-изд. л. 1.
На магнитоносителе.

Волгоградский государственный технический университет.
400131, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.