МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «МАТЕМАТИКА»

С. Ю. Кузьмин, Н. Н. Короткова, Д. А. Мустафина, И. В. Ребро

Методические указания для выполнения семестровой работы по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Методические указания

Волжский
2011

УДК 519.2

Рецензент
канд. тех. наук, доцент *В.Б. Светличная*

Издается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Кузьмин, С. Ю. **Методические указания для выполнения семестровой работы по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» [**Электронный ресурс**]**: методические указания / С. Ю. Кузьмин, Н. Н. Короткова, Д. А. Мустафина, И. В. Ребро // Сборник «Методические указания» Выпуск 3. - Электрон. текстовые дан. (1файл: 188Kb) – Волжский: ВПИ (филиал) ГОУВПО ВолгГТУ, 2011. - Систем. требования: Windows 95 и выше; ПК с процессором 486+; CD-ROM. – номер гос. регистрации 0321101953.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей дневной и очно-заочной (вечерней) форм обучения высших технических учебных заведений. Содержат решения варианта №9 семестровой работы по теме «Дифференцирование функции одной переменной».

Илл.2, библиография: 1 название

Вариант 9

Часть А

1. Найти производные первого порядка данных функций:

1) $y = 17^x - 2x^{17}$***;***

2) $y = \sqrt{x}\ln x$***;***

3) $y = \dfrac{tgx}{x^2}$***;***

4) $y = \sin(\lg x)$**.**

Решение:

1) $y' = (17^x - 2x^{17})' = 17^x \ln 17 - 34x^{16}$.

2) $y' = (\sqrt{x}\ln x)' = (\sqrt{x})'\ln x + \sqrt{x}(\ln x)' = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\ln x + 1}{\sqrt{x}}$**.**

3) $y' = \left(\dfrac{tgx}{x^2}\right)' = \dfrac{(tgx)'x^2 - (x^2)'tgx}{x^4} = \dfrac{\dfrac{x^2}{\cos^2 x} - 2xtgx}{x^4} = \dfrac{x - 2\cos^2 xtgx}{x^3\cos^2 x} =$

$= \dfrac{x - 2\cos\ x\sin x}{x^3\cos^2 x} = \dfrac{x - \sin 2x}{x^3\cos^2 x}$.

4) $y' = (\sin(\lg x))' = (\lg x)'\cos(\lg x) = \dfrac{\cos(\lg x)}{x\ln 10}$**.**

2.Провести полное исследование функции и построить ее график:

$y = 16x^3 - 12x^2 - 4$**.**

Решение:

1) D(y) =R, E(y) =R. Областью определения и областью значения данной функции являются все числа.

2) $y(-x) = 16(-x)^3 - 12(-x)^2 - 4 = -16x^3 - 12x^2 - 4$, функция не является ни четной, ни нечетной.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(16x^3 - 12x^2 - 4) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(16x^3 - 12x^2 - 4) = -\infty$.

4) Точек разрыва нет.

5) С Ох: y=0$\Rightarrow 16x^3 - 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(16x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow$x=0,
$16x^2 + 4x + 4 = 0$ не имеет действительных корней, следовательно одна точка пересечения с осью Ох (1;0).

С Оу: х=0 $\Rightarrow$y= -4, следовательно, одна точка пересечения с осью Оу (0;-4)

6) Вертикальный асимптот нет.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{16x^3 - 12x^2 - 4}{x} = \infty$, наклонных асимптот нет.

7) $y' = (16x^3 - 12x^2 - 4)' = 48x^2 - 24x$

$y' > 0$ при х$\in (-\infty;0)$ и $(0,5;+\infty)$, $y' < 0$ при х$\in (0;0,5)$,

$x = 0$ - точка максимума $y(0) = -4$, $x = 0,5$ - точка минимума, $y(0,5) = -5$.

8) $y'' = 96x - 24$,

$y'' > 0$, при х$\in (0,25;+\infty)$ функция выпукла, $y'' < 0$, при х функция вогнута при х$\in (-\infty;0,25)$,

х=0, 25 точка перегиба.

9) С учетом предыдущих пунктов строим график функции (рис.1):

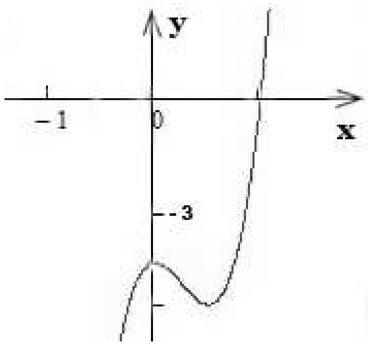

Рис. 1

3. Найти производную2-го порядка данной функции: $y = -x\cos x$.

Решение :

$y' = (-x)' \cdot \cos x - x \cdot (\cos x)' = -\cos x + x\sin x$,

$y'' = (-\cos x)' + x'\sin x + x(\sin x)' = \sin x + \sin x + x\cos x = 2\sin x + x\cos x$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (12 - x)\cdot\sqrt{x}$ ***на отрезке [1,9].***

Решение:

Найдем критические точки функции:

$y' = (12 - x)' \cdot \sqrt{x} + (\sqrt{x})'(12 - x) = -\sqrt{x} + \dfrac{12 - x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{12 - 2x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6 - x}{\sqrt{x}}$,

$y' = 0$ при х=6$\in [1;9]$, y' не существует при х=0$\notin [1;9]$.

Имеем одно критическую точку х=6, $y(6) = 6\sqrt{6} \approx 13$.

Найдем значения функции на концах данного отрезка $y(1) = 11$, $y(9) = 9$.

Таким образом, наибольшее значение равно $6\sqrt{6}$. Наименьшее 9.

5. *Составить уравнения касательной и нормали к графику функции* $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x + 2$ ***в точке*** $x_0 = -1$.

Решение:

$y_0(-1) = 3$

$y' = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^5} + 2$, $y'(-1) = \frac{-5}{2}$.

Уравнение касательной: $y - 3 = \frac{-5}{2}(x+1) \Rightarrow y = \frac{-5x+1}{2}$.

Уравнение нормали: $y - 3 = \frac{2}{5}(x+1) \Rightarrow y = \frac{2x+17}{5}$.

Часть В

1. ***Найти производные первого порядка данных функций:***

1) $y = 2^{\sqrt{sin(x)}}$ **;**

2) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$ **;**

3) $y \cdot ln(x^2) - arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ **;**

4) $y = (tg(4x))^{4e^x}$ **.**

Решение:

1) $y' = (2^{\sqrt{\sin(x)}})' = 2^{\sqrt{\sin(x)}} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

2) $x' = t - t^3$, $y' = t + t^2$,

тогда $y'_x = \frac{y'}{x'} = \frac{t+t^2}{t-t^3} = \frac{1+t}{1-t^2} = \frac{1}{1-t}$.

3) Дифференцируем уравнение $y \cdot ln(x^2) - arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ по x :

$$y' \cdot \frac{2x}{x^2} - \frac{y'x - y}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = 0,$$

$$y'\frac{2x}{x^2} - \frac{y'x - y}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} = \frac{y}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}},$$

$$y'(\frac{2}{x} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - y^2}}) = \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

$$y' \cdot \frac{2\sqrt{1 - y^2} - x^3}{x\sqrt{1 - y^2}} = \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

$$y' = \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot \frac{x\sqrt{1 - y^2}}{2\sqrt{1 - y^2} - x^3},$$

$$y' = \frac{x^2 y}{2\sqrt{1 - y^2} - x^3}.$$

4) Найдем производную логарифмическим дифференцированием:

$$Lny = Ln(tg(4x))^{4e^x},$$

$$Lny = 4e^x Lntg(4x),$$

$$(Lny)' = (4e^x Lntg(4x))',$$

$$\frac{y'}{y} = 4e^x Lntg(4x) + \frac{4}{tg4x \cdot \cos^2 4x},$$

$$\frac{y'}{y} = 4e^x Lntg(4x) + \frac{4}{tg4x \cdot \cos^2 4x},$$

$$\frac{y'}{y} = 4e^x Lntg(4x) + \frac{4}{\sin 4x \cdot \cos 4x},$$

$$\frac{y'}{y} = 4e^x Lntg(4x) + \frac{8}{\sin 8x},$$

$$y' = (tg(4x))^{4e^x}(4e^x Lntg(4x) + \frac{8}{\sin 8x}).$$

2.Исследовать функцию и построить ее график: $y = 2^{\frac{x-2}{x}}$ **.**

1) D(y)=R кроме x=0.

Областью определения и областью значения данной функции являются все числа кроме x = 0.

2) $y(-x)=2^{\frac{-x-2}{-x}}$, функция не является ни четной, ни нечетной.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{x-2}{x}}=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{\frac{x-2}{x}}=2$.

4) $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{x-2}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{x-2}{x}}=0$, x=0 – точка разрыва второго рода.

5) Точек пересечения с осями координат нет.

6) x=0 – вертикальная асимптота.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{x-2}{x}}}{x}=0$, b= $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{x-2}{x}}-0=2$,

y=2 горизонтальная асимптота.

7) $y'=\left(2^{\frac{x-2}{x}}\right)'=2^{\frac{x-2}{x}}\cdot\dfrac{x-x+2}{x^2}\cdot\ln 2=2^{\frac{x-2}{x}}\cdot\dfrac{2\ln 2}{x^2}$;

$y'>0$ при всех значениях x из области определения, функция возрастающая.

8) С учетом предыдущих пунктов строим график функции (рис.2):

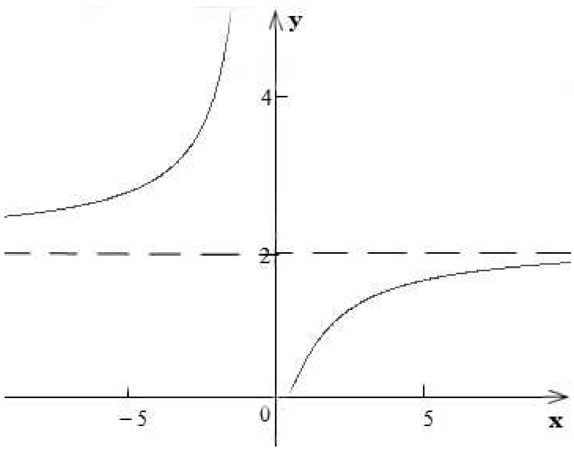

Рис. 2

3. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln x)^{tg\,x}$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sin(3x)-6x}{x^3}\right]$.

Решение:

1) $y=(\ln x)^{tgx}$, $\ln y = tgx\cdot\ln(\ln x)$,

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0} tgx\cdot\ln(\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\ln x)}{ctgx}=$$

{Применим несколько раз правило Лопиталя и получим} $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{(\ln(\ln x))'}{(ctgx)'}=$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}==\lim_{x\to+0}\frac{-\sin^2 x}{x\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\sin x\cos x}{\ln x+1}=$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{-2\cos x\cos x-2\sin x\sin x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2}{1/x}=0.$$

Следовательно $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to+0} y=0$,

таким образом $\lim\limits_{x\to+0} y=1$, а значит и $\lim\limits_{x\to+0}(\ln x)^{tg\,x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2\sin(3x)-6x}{x^3}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{6\cos(3x)-6}{3x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-18\sin(3x)}{6x}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-54\cos(3x)}{6}\right]=-9$.

Часть С

1.Найти радиус кривизны кривой $y = \sin(x)$ ***в точке*** **(** $\frac{\pi}{2}$ **;1).**

Решение:

Вычислим производные и подставим их в формулу кривизны.

$$K = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{|-\sin(x)|}{\left(1+\cos^2(x)\right)^{3/2}} = \frac{\left|-\sin\left(\pi/2\right)\right|}{\left(1+\cos^2\left(\pi/2\right)\right)^{3/2}} = 1$$

Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне:

$$R = \frac{1}{|K|} = 1.$$

2. Вычислить координаты центра кривизны кривой $y = e^x$ ***в точке*** **(0;1*).***

Решение:

Координаты ξ и η центра кривизны линии $y = f(x)$ вычисляются по формулам:

$$\xi = x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''} = x - \frac{e^x(1+(e^x)^2)}{e^x} = 0 - \frac{e^0(1+(e^0)^2)}{e^0} = -2,$$

$$\eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = e^x + \frac{1+(e^x)^2}{e^x} = e^0 + \frac{1+(e^0)^2}{e^0} = 3.$$

3. Найти кривизну кривой в любой точке $\begin{cases} x = a\cos^3(t) \\ y = a\sin^3(t) \end{cases}$**.**

Решение:

Вычислим производные и подставим их в формулу кривизны.

$$x_t^{/} = -3a\cos^2(t)\sin(t) \quad y_t^{/} = 3a\sin^2(t)\cos(t)$$

$$\left(x_t^{/}\right)^2 + \left(y_t^{/}\right)^2 = \left(-3a\cos^2(t)\sin(t)\right)^2 + \left(3a\cos^2(t)\sin(t)\right)^2 =$$

$$= 9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = 9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)$$

$$x_{tt}^{//} = (-3a\cos^2(t))^{/}\sin(t) + (-3a\cos^2(t))(\sin(t))^{/} = 6a\cos(t)\sin^2(t) - 3a\cos^3(t)$$

$$y_{tt}^{//} = (3a\sin^2(t))^{/}\cos(t) + 3a\sin^2(t))(\cos(t))^{/} = 6a\sin(t)\cos^2(t) - 3a\sin^3(t),$$

тогда $x_t^{/} y_{tt}^{//} - y_t^{/} x_{tt}^{//} =$

$$= -18a^2\cos^4(t)\sin^2(t) + 9a^2\cos^2(t)\sin^4(t) - 18a^2\cos^2(t)\sin^4(t) + 9a^2\cos^4(t)\sin^2(t) =$$

$$= -18a^2\cos^2(t)\sin^2(t)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right) + 9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right) =$$

$$= -18a^2\cos^2(t)\sin^2(t) + 9a^2\cos^2(t)\sin^2(t) = -9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)$$

$$K = \frac{\left|x_t^{/} y_{tt}^{//} - y_t^{/} x_{tt}^{//}\right|}{((x_t^{/})^2 + (y_t^{/})^2)^{3/2}} = \frac{9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)}{27a^3\cos^3(t)\sin^3(t)} = \frac{1}{3a\cos(t)\sin(t)}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мустафина Д.А., Ребро И.В., Кузьмин С.Ю., Короткова Н. Н. Дифференцирование функции одной и нескольких переменных с приложениями: учеб. пособие / Д.А.Мустафина, И.В.Ребро, С.Ю.Кузьмин, Н. Н. Короткова; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград. 2009.- 118с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Сергей Юрьевич **Кузьмин**
Джамиля Алиевна **Мустафина**
Неля Николаевна **Короткова**
Ирина Викторовна **Ребро**

Методические указания для выполнения семестровой работы по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Методические указания

План электронных изданий 2011 г. Поз. № 105В
Подписано на «Выпуск в свет» 28.04.11. Уч-изд. л. 0,72.
На магнитоносителе.

Волгоградский государственный технический университет.
400131, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.